

Les équations différentielles pour les débutants

Jean-Baptiste Hiriart-Urruty

▶ **To cite this version:**

Jean-Baptiste Hiriart-Urruty. Les équations différentielles pour les débutants. DEUG. Equations différentielles (en L0, L1, L2), France. 2013, pp.180. hal-05336086

HAL Id: hal-05336086
https://hal.science/hal-05336086v1

Submitted on 29 Oct 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

Les équations différentielles pour les débutants

Jean-Baptiste HIRIART-URRUTY
Professeur à l'Université Paul Sabatier de Toulouse
http://www.math.univ-toulouse.fr/∼jbhu/

23 août 2025

Avant-propos au nouveau tirage

Après douze années de bons et loyaux services, ce livre est épuisé... Il a donc « vécu sa vie » , mais nous avons décidé de le mettre désormais à disposition des étudiants (L1, L2, préparations à certains concours), gratuitement, sous forme de fichier pdf téléchargeable.

Depuis 2013, certaines choses sur le sujet concerné ont changé, d'autres pas. D'abord, reconnaissons qu'un déluge de présentations, sous formes de diaporamas ou de vidéos, sur les équations différentielles sont désormais disponibles ; mais rien ne remplacera un travail personnel, un crayon à la main, car *on ne progresse en mathématiques qu'en en faisant, en acceptant même de « sécher ».* Ensuite, les programmes de Terminales, pour la partie concernant les équations différentielles, ont légèrement évolué, pas tant que ça (*cf.* rubrique « Primitives, équations différentielles » des programmes officiels de mathématiques [1]) ; cela ne change rien pour nous puisque nous reprenons tout à zéro ici.

Pour reparler de ce livre, quoi de mieux que de citer quelques extraits de recensions et observations qui en ont été faites depuis sa parution en 2013 :

— *« Les théorèmes sont démontrés et mis en valeur, mais ce qui fait l'originalité du livre ce sont les résumés, commentaires, mises en garde, qui, dans un style familier et accrocheur pour les potaches, les accompagnent »*

— *« Ce livre reprend tout à zéro. Il procède par petits pas, qui permettent à tous les étudiants de comprendre avant d'apprendre, en s'appuyant sur des exemples intégrés au fil du texte. Ce cours illustré est le fruit de dizaines d'années d'expérience de l'enseignement à tous les niveaux, aussi bien avant qu'après le Bac »*

— *« Enfin un livre clair sur un sujet délicat »*

— *« L'auteur a eu l'intelligence de remplacer la variable x par t (variable du temps), signe que l'ouvrage est destiné aussi à des utilisateurs (physiciens, électroniciens, etc.), ils seront infiniment moins déroutés ainsi. Il s'apparente à bien des égards à la philosophie des ouvrages anglo-saxons »*

— *« Ca manque un peu d'exercices »* (L'auteur : Il y a des exercices corrigés qui sont intégrés dans le texte, mais ceci n'est pas un recueil d'exercices..., le volume en serait augmenté d'un facteur trois, et des collections d'exercices sur ce sujet, il n'en manque pas...)

— *« Les deux dernières pages sur les méthodes numériques et les logiciels auraient mérité un plus long développement »* (L'auteur : Oui, d'autant que les logiciels et les langages de programmation évoluent... mais, après consultation des enseignants confrontés à cet objectif, on s'en est tenu à expliquer les idées introductives).

Ce livre a été voulu « léger en poids et en prix (!) »... J'en ai trop vu de livres épais et touffus sur le sujet, où l'auteur veut raconter tout ce qu'il sait, avec en plus des dizaines de pages

1. Ce qu'il y a à savoir au sortir de Terminales est contenu dans les trois premiers paragraphes du premier chapitre du présent livre.

historiques... que personne ne lit. Ici, l'interlocuteur est l'étudiant en apprentissage, pas le collègue... De fait, des centaines d'étudiants ont suivi un enseignement avec la matière de ce livre comme support écrit, et ont été formés avec succès à ce domaine des mathématiques.

Bon travail au lecteur-étudiant.

Toulouse et Pays basque, été 2025

AVANT-PROPOS

« *Differential equations are one of the basic tools of mathematics* »

V.I. Arnold (1937-2010)

Les équations différentielles (les équa diff en abrégé)... en voilà un domaine des mathématiques dont on se sert dans beaucoup de disciplines scientifiques. On aurait pu écrire « Les équations différentielles en Physique », « Les équations différentielles en Biologie », « Les équations différentielles en Economie », etc. De fait, de nombreux (et volumineux) ouvrages existent sur ces sujets. Le problème des équations différentielles est qu'il y a beaucoup de choses à dire, et ce à tous niveaux d'étude... Notre objectif dans le présent livre est de guider les premiers pas dans l'étude des équations différentielles, de manière très progressive, en ne nous appuyant que sur ce qui est disponible et acquis à l'issue des études en lycée [2]. Ainsi, nous avons été amené à tout faire « à la main », en n'utilisant que « les moyens du bord », dans un style de progression qui nous est cher : en spirale plutôt que linéaire. Le domaine couvert démarre au niveau des classes terminales de lycée et se poursuit de manière à englober ce qui figure habituellement dans les programmes de formations de niveaux Bac+1 et Bac+2. En fait, par certains aspects du « non linéaire » (chapitre 6), nous sommes allés au-delà, défrichant ce qui est davantage du niveau Bac+3. Mis à part un résultat d'existence et d'unicité au chapitre 3, tout est démontré, en considérant les objets mathématiques les plus simples possibles (ainsi, si tout peut être fait avec les fonctions à valeurs réelles, inutile d'aller chercher les fonctions à valeurs complexes ; cela peut être plus confortable pour le formateur, mais pas nécessairement pour l'étudiant). Ce qui est présenté l'est de manière suffisamment détaillée pour que sa connaissance (active !) remplisse pour le lecteur-étudiant la fonction de SMIC (= Savoir Minimum Indispensable pour Continuer)... Les paragraphes ou passages marqués d'une étoile peuvent être sautés en première lecture. Nous terminons cet avant-propos avec quelques réflexions laissées à la méditation du lecteur.

• « *Les équa diff, c'est pas diff...* »

Un étudiant (qui a souhaité conserver l'anonymat)

• « *Ne vous laissez pas impressionner par ceux qui semblent plus doués, brillants, rapides. Prenez votre temps et votre chemin, vous pourrez en doubler plus d'un.* »

M. Vergne (1943-), mathématicienne académicienne

• « *Rien de si pratique... qu'une bonne théorie.* »

H. Von Helmholtz (1821-1874)

2. Les nouveaux programmes de mathématiques des classes terminales de lycées (Bulletin Officiel d'octobre 2011) ne font plus apparaître d'étude spécifique d'équations différentielles, même les plus simples.

• « *Science is not and will not be a closed book. Every important advance brings new questions. Every development reveals, in the long run, new and deeper difficulties.* »

A. Einstein (1879-1955)

• « *La science n'est ni une voie simple ni une bonne option pour faire fortune. C'est un chemin difficile, qui exige beaucoup de conviction et de passion. En échange, celui qui choisit cette voie recevra comme récompenses des émotions et des vérités qu'il lui sera difficile d'atteindre par un autre chemin.* »

Ngô Bao Châu (1972-), Médaille Fields en 2010

Toulouse et Pays basque, 2010-2011

Table des matières

1 Equations différentielles linéaires scalaires du premier ordre à coefficients constants, du deuxième ordre à coefficients constants 11

1.1 Introduction générale 13
1.2 L'équation différentielle la plus simple 15
1.3 Équations différentielles linéaires (scalaires) du 1^{er} ordre à coefficients constants 18
1.3.1 Situation où le second membre c de $(\text{ed})_1$ est la fonction nulle 18
1.3.2 Situation où le second membre c de $(\text{ed})_1$ est une fonction continue . . . 19
1.3.3 Deux exemples simples en Physique 21
1.3.4 Un prolongement possible 23
1.4 Équations différentielles linéaires (scalaires) du 2^{eme} ordre à coefficients constants 24
1.4.1 Situation où le second membre de $(\text{ed})_2$ est la fonction nulle 25
1.4.2 Situation où le second membre de $(\text{ed})_2$ est une fonction continue 34
1.4.3 Techniques de recherche de solutions particulières de $(\text{ed})_2$ lorsque les seconds membres sont des fonctions polynomiales, exponentielles ou trigonométriques 39
Annexe 1 45
Annexe 2 – Boîte à outils 47

2 Équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre à coefficients fonctions continues 49

2.1 Cas d'une équation différentielle $(\text{ed})_1$ avec second membre nul ($\gamma \equiv 0$) 51
2.2 Cas d'une équation différentielle $(\text{ed})_1$ complète (c'est-à-dire, avec un second membre $\gamma \not\equiv 0$) 55
2.2.1 Comment trouver *une* solution de $(\text{ed})_1$? 55
2.2.2 Comment trouver *toutes* les solutions de $(\text{ed})_1$? 57
2.3 Le problème (dit) de Cauchy 58
2.4 Retour à l'équa diff générale 59
2.5 Un coup d'œil du côté du monde non linéaire 61
Annexe 1 – Boîte à outils 63

3 Équations différentielles linéaires scalaires du deuxième ordre à coefficients fonctions continues 65
3.1 Résolution de l'équation différentielle $(\text{ed})_2$ lorsque le second membre δ est une fonction nulle . . . 67
3.1.1 Un résultat général d'existence et d'unicité de solutions . . . 68
3.1.2 Ensemble des solutions de $(\text{ed})_{2,0}$ . . . 69
3.1.3 Le wronskien comme testeur d'indépendance linéaire de solutions de $(\text{ed})_{2,0}$ 72
3.1.4 Technique de recherche d'une autre solution de $(\text{ed})_{2,0}$ quand on en connaît déjà une . . . 75
3.2 Résolution de l'équation différentielle complète $(\text{ed})_2$ . . . 80
3.2.1 La méthode de « la variation des constantes » . . . 80
3.2.2 Technique de recherche d'une solution de $(\text{ed})_2$ quand on connaît une solution de $(\text{ed})_{2,0}$ . . . 82
3.2.3 Technique de résolution à l'aide de séries entières . . . 83
Annexe 1 – B.a-ba des séries entières . . . 88

4 Équations différentielles linéaires vectorielles (ou systèmes différentiels linéaires) du premier ordre à coefficients constants 91
4.1 Etude et résolution de $(\text{EDL})_0$ . . . 94
4.1.1 L'exponentielle d'une matrice . . . 94
4.1.2 Techniques basiques de calcul de e^A . . . 99
4.1.3 Résolution théorique de $(\text{EDL})_0$ . . . 104
4.1.4 Méthodes pratiques de résolution de $(\text{EDL})_0$ . . . 106
4.1.5 Détermination explicite de e^{tA} lorsque $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . . . 113
4.1.6 Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre n à coefficients constants : intégration dans le modèle $(\text{EDL})_0$ . . . 115
4.2 Résolution de l'équation différentielle complète (EDL) . . . 119
4.2.1 Résultat d'existence et d'unicité de solutions . . . 119
4.2.2 Techniques de recherche d'une solution « particulière » de (EDL) . . . 120
4.3 Final sur les équations différentielles scalaires d'ordre n (complètes) à coefficients constants . . . 121
Annexe 1 – Complément . . . 122
Annexe 2 – Complément . . . 123

5 Classification des systèmes différentiels $X' = AX$ lorsque A est une matrice $(2,2)$ 125
5.1 Introduction . . . 127
5.2 Situations où A est inversible et les valeurs propres de A sont distinctes . . . 128
5.2.1 Cas des valeurs propres réelles . . . 128
5.2.2 Cas des valeurs propres complexes conjuguées . . . 134
5.3 Prolongements possibles . . . 138

6 Équations différentielles non linéaires **139**
6.1 Généralités . . . 141
6.1.1 Ce qu'est une équation différentielle, ce que signifie « la résoudre » . . . 141
6.1.2 Les premières questions que l'on se pose à propos des équations différentielles ((ed) comme (ED)) . . . 145
6.1.3 Comment passer d'une équation différentielle scalaire du deuxième ordre à une équation différentielle vectorielle du premier ordre ? . . . 145
6.2 Exemples divers . . . 146
6.2.1 Equations différentielles vectorielles linéaires . . . 146
6.2.2 Exemples historiques ou prototypes . . . 146
6.2.3 Exemples-Illustrations . . . 148
6.3 Un résultat d'existence et d'unicité dans un problème de CAUCHY scalaire . . . 154
6.3.1 Prolongement - Maximalité . . . 154
6.3.2 Un résultat d'existence et d'unicité de solutions . . . 154
6.3.3 Davantage sur les équations différentielles (scalaires) autonomes . . . 158
6.3.4 Un exemple de technique de résolution : le cas des équations différentielles dites « à variables séparables » . . . 159
6.4 Systèmes différentiels non linéaires du plan, notamment autonomes . . . 162
6.4.1 Un résultat d'existence et d'unicité dans un problème de CAUCHY vectoriel 162
6.4.2 Davantage sur les systèmes différentiels autonomes du plan . . . 162

7 La méthode d'Euler **167**
7.1 La méthode d'EULER . . . 169
7.1.1 Présentation . . . 169
7.1.2 Les questions que, naturellement, on se pose . . . 170
7.1.3 Exemples . . . 171
7.1.4 Ordre de grandeur de l'erreur . . . 173
7.2 Des méthodes numériques plus précises . . . 173
7.3 Un mot des logiciels . . . 175

Vignette historique **177**

Références **179**

Chapitre 1

Equations différentielles linéaires scalaires du premier ordre à coefficients constants, du deuxième ordre à coefficients constants

Ce premier chapitre a pour but d'étudier les équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre à coefficients constants

$$ay'(t) + by(t) = c(t),$$

et du deuxième ordre à coefficients constants

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t).$$

Les résultats et techniques utilisés sont (uniquement) ceux que le lecteur-étudiant a acquis en classes de Terminales des lycées et, pour quelques uns, dans un enseignement d'Analyse de 1ère année d'études supérieures (niveau Bac+1, ou L1). Ils se résument à ceux-ci :

- Les fonctions usuelles (trigonométriques, exponentielles, polynômes)
- Les dérivées des fonctions usuelles
- La règle de dérivation du produit de deux fonctions dérivables
- La fait que toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle
- La résolution d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues
- La résolution des équations du second degré.

Tout cela est d'ailleurs rappelé en Annexe 2, dénommée « Boîte à outils ».
L'objectif est clair : tout faire « à la main », en n'utilisant que « les moyens du bord », dans une progression en spirale plutôt que linéaire. C'est l'approche « tout avec les fonctions à valeurs réelles » qui est privilégiée, laissant l'approche « via les fonctions à valeurs complexes » comme commentaire en Annexe 1.

Sommaire

1.1 Introduction générale 13
1.2 L'équation différentielle la plus simple 15
1.3 Équations différentielles linéaires (scalaires) du 1^{er} ordre à coefficients constants 18
1.4 Équations différentielles linéaires (scalaires) du 2^{eme} ordre à coefficients constants 24
Annexe 1 45
Annexe 2 – Boîte à outils 47

1.1 Introduction générale

« Équations différentielles », en voilà une appellation étrange, un substantif « équations » et un qualificatif « différentiel ». Cela mérite quelques explications.
« Équations » fait bien penser *qu'il y a quelque chose à résoudre, des inconnues.* Le lecteur-étudiant a été confronté à des situations comme :

$$\text{Résoudre l'équation} \quad x^2 + x + 1 = 0. \tag{1.1}$$

Il s'agit de trouver des nombres réels x vérifiant (1.1) (s'il y en a !). Le même type de question, par exemple

$$\text{Résoudre l'équation} \quad x^2 + 1 = 0 \tag{1.2}$$

a conduit à aller regarder du côté des nombres complexes. Nous aurons aussi l'occasion de faire ce détour à l'occasion de la résolution d'équations différentielles.
« Différentielles » est là pour indiquer que *des fonctions avec leurs (fonctions) dérivées interviennent dans la formulation des équations.* Avant de donner des exemples, un mot des notations :

Fonctions. Lorsqu'on parlera de fonctions de la variable réelle, on écrira

$$\begin{array}{rccc} f & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f(x), \end{array}$$

en indiquant bien l'ensemble (en général un intervalle) I sur lequel on considère f.

Variables. Seule *une* variable réelle sera en jeu ; elle sera notée x, t, θ, ... suivant les contextes et les habitudes des domaines scientifiques d'applications.

Intervalles. Nous considérons toujours des fonctions définies sur un *intervalle* I de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire un ensemble « d'un seul tenant », ou bien « sans trou »), et même un intervalle ouvert. Des exemples en sont :

$$I = \mathbb{R}, \quad I =]0, +\infty[\,, \quad I =]-1, +1[\,.$$

Dérivées d'une fonction. Plusieurs notations sont utilisées suivant les contextes et les habitudes des domaines d'applications. En voici les principales :

$f'(x)$ [la variable est x, f' indique la (fonction) dérivée de la fonction f] ;
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ [la variable est x, y est la notation pour la fonction de x] ;
$\dot{x}(t)$ [la variable est t, $\dot{x}(t)$ indique la (fonction) dérivée de la fonction x].

On retrouve des notations similaires pour les dérivées d'ordre supérieur, par exemple :

$$f^{(4)}(x), \ \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3}, \ \ddot{x}(t).$$

Vite dit, une équation différentielle est une relation entre une fonction et quelques unes de ses dérivées. Une appellation tout aussi parlante eût été *« équations aux dérivées »*... mais on ne peut revenir sur les appellations (et notations) ! bien établies. Voici quelques exemples :

- $$f' + xf = e^x. \tag{1.3}$$
  Ici la variable (réelle) est x, la fonction cherchée est $x \in I \mapsto f(x)$.
- $$y' + y^3 = \sin t. \tag{1.4}$$
  Ici la variable est t, la fonction cherchée est $t \in I \mapsto y(t)$.
- $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1+y^2}{1+x^2}. \tag{1.5}$$
  Ici la variable est x, la fonction cherchée est $x \in I \mapsto y(x)$.
- $$\ddot{x}(t) + k\dot{x}(t) = \sin t. \tag{1.6}$$
  Ici la variable est t, la fonction cherchée est $t \in I \mapsto x(t)$.

Une première source de difficultés pour le lecteur-étudiant est que toutes les expressions de (1.3) à (1.6) sont des abréviations : on aurait dû écrire, par exemple, $y'(t) + y(t)^3 = \sin t$ à la place de (1.4). C'est d'ailleurs une recommandation que nous faisons : faire apparaître la variable sous-jacente (x, t, ...) partout où elle doit l'être. Après, avec un peu d'habitude, on pourra passer aux expressions abrégées.
Une autre difficulté est qu'on n'a rien dit sur l'intervalle I sur lequel est définie la fonction cherchée... C'est un point-clé de la résolution des équations différentielles sur lequel nous reviendrons abondamment. Retenons pour l'instant que ce qui est recherché est

une fonction $x \in I \mapsto y(x)$,
c'est-à-dire à la fois I et l'expression $f(x)$ de f en $x \in I$.

L'*ordre* d'une équation différentielle est l'ordre de dérivation le plus élevé apparaissant dans l'écriture de l'équation différentielle : (1.4) est du 1er ordre par exemple, (1.6) du 2^e ordre.
Après avoir donné quelques exemples d'équations différentielles, voici maintenant deux exemples d'équations où interviennent (comme inconnues) des fonctions, mais qui ne sont pas des équations différentielles.

Exemple 1.1.1 Déterminer les fonctions $f : I =]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dérivables sur I telles que

$$f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{pour tout} \quad x \in I. \tag{1.7}$$

Ceci n'est pas une équation différentielle : $f'(x)$ est là bien sûr, mais f intervient via $\dfrac{1}{x}$ (et non x). On dit de (1.7) que c'est une *équation fonctionnelle* (on cherche une fonction telle que...)

Exemple 1.1.2 Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

C'est encore une équation fonctionnelle... où la dérivée de f n'apparaît même pas.

On peut néanmoins subodorer que la résolution d'équations différentielles pourra aider à la résolution de ces équations fonctionnelles, ce qui sera le cas (ce sera vu à l'occasion d'exercices). Avec l'exemple ci-dessous, on n'est pas dans le contexte des équations différentielles telles qu'on va les étudier, mais on n'en est pas très loin.

Exemple 1.1.3 Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$f'(t) = f(t-2) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}. \tag{1.9}$$

On appelle ces équations des *équations différentielles avec retard* (car c'est $f(t-2)$ qui intervient dans (1.9), et non $f(t)$). Elles ne seront pas considérées dans ce Cours.

L'appellation « équations différentielles » est parfois accompagnée du qualificatif additionnel « ordinaires » (EDO en abrégé, « ordinary differential equations » (ODE) en Anglais). La raison en est qu'on veut parfois différencier avec les « équations aux dérivées partielles » (EDP en abrégé), équations dans lesquelles les dérivations par rapport à plusieurs variables réelles (des dérivées partielles donc) apparaissent. Ainsi,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{1.10}$$

est une équation aux dérivées partielles, car la fonction à rechercher, $u : (t,x) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, est une fonction de deux variables réelles, t et x.

Retenons de cette introduction la règle suivante :

Dans l'équation différentielle proposée à l'étude, bien détecter la variable réelle en jeu (son nom, son écriture) ainsi que les fonctions de cette variable et leurs dérivées (leurs graphismes, leurs ordres de dérivation).

1.2 L'équation différentielle la plus simple

L'équation différentielle la plus simple est

$$\boxed{y' = 0.} \tag{1.11}$$

Nous décidons pour ce paragraphe que la variable réelle sera notée t (t comme le temps). L'écriture (1.11) est une abréviation de

$$y'(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \in I. \tag{1.11'}$$

La résolution de cette équation différentielle passe par les deux observations suivantes :

- Si $y : t \in I \mapsto y(t)$ est une fonction constante sur I, alors y est dérivable sur I et sa dérivée y' est partout nulle (c'est-à-dire, $y'(t) = 0$ pour tout $t \in I$).
- Si $y : t \in I \mapsto y(t)$ est une fonction dérivable sur l'*intervalle* I et que sa dérivée y' est partout nulle, alors y est une fonction constante sur I.

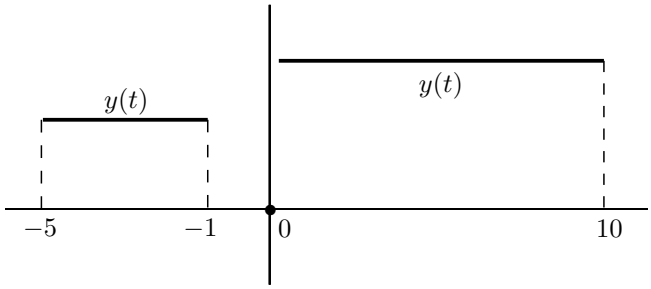


Figure 1

Attention (piège dans lequel tombent fréquemment les débutants) ! Ce deuxième résultat n'est valable que si I est un intervalle (c'est-à-dire, « d'un seul tenant »).

Dans l'exemple de la Figure 1, $y'(t) = 0$ pour tout $t \in A =]-5, 1[\cup]0, 10[$, et pourtant la fonction y n'est pas constante sur A.
La démonstration du deuxième résultat évoqué au-dessus est facile, elle résulte du théorème des accroissements finis (ou théorème de la valeur moyenne) :
Si $y : t \in I \mapsto y(t)$ est une fonction dérivable sur l'*intervalle* I, et si $t_1 < t_2$ sont deux points quelconques de I, il existe alors $\theta \in]t_1, t_2[$ (intermédiaire entre t_1 et t_2) tel que

$$\begin{array}{ll} & y(t_2) - y(t_1) = y'(\theta)(t_2 - t_1) \\ & \text{[évaluation de « l'accroissement » } y(t_2) - y(t_1)\text{]}, \\ \text{ou bien} & \\ & \dfrac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1} = y'(\theta) \\ & \text{[évaluation de la « valeur moyenne » de } y \text{ entre } t_1 \text{ et } t_2\text{]}. \end{array} \tag{1.12}$$

Ainsi, si $t_1 = a \in I$ est fixé, pour toute autre valeur $t = t_2$ de I, l'évaluation (1.12) fait que $y(t) = y(a)$.
Nous avons donc un premier théorème de résolution d'équations différentielles, celui concernant (1.11) ; il donne l'expression $y(t)$ de la solution et l'intervalle I le plus grand possible où cette solution est définie, I est toute la droite réelle.

Théorème 1.2.1 Toutes les solutions de l'équation différentielle $y' = 0$ sont de la forme

$$t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) = C,$$

où C est une constante réelle.

La deuxième équation différentielle la plus simple, celle qui vient juste après (1.11), est

$$\boxed{y' = y.} \tag{1.13}$$

Il peut y avoir ici, au premier abord, une petite difficulté de compréhension : d'un côté la valeur $y(t)$ de la fonction y en t, de l'autre la valeur $y'(t)$ de la dérivée de cette même fonction y en t. Ce qui est demandé, c'est l'égalité de deux fonctions

$$y'(t) = y(t) \quad \text{pour tout } t \in I,$$

égalité entre deux notions qui ne jouent pas le même rôle (si on regarde le graphe représentant la fonction y, $y(t)$ est l'ordonnée du point $(t, y(t))$ du graphe, alors que $y'(t)$ est la pente de la droite tangente au graphe en ce même point).
La résolution de l'équation différentielle (1.13) se ramène à celle de l'équation précédente (1.11), au vu des deux observations suivantes :

— La fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) = e^t$ a pour dérivée $y'(t) = e^t$, et ce pour tout $t \in \mathbb{R}$.
— Si $y : t \in I \mapsto y(t)$ est une fonction dérivable sur I, alors la fonction $z : t \in I \mapsto z(t) = e^{-t}y(t)$ est aussi dérivable sur I, de dérivée

$$z'(t) = e^{-t}y'(t) - e^{-t}y(t) \quad \text{pour tout } t \in I. \tag{1.14}$$

Ainsi,

$$\begin{array}{ll} & \big(y'(t) = y(t) \quad \text{pour tout } t \in I\big) \\ \Leftrightarrow & \big(e^{-t}y'(t)) - e^{-t}y(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \in I\big) \ \big[\text{car } e^{-t} \neq 0 \text{ pour tout } t\big] \\ \Leftrightarrow & \big(z'(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \in I\big)\,. \end{array}$$

A l'aide du Théorème 1.2.1, nous arrivons donc à :

Théorème 1.2.2 Toutes les solutions de l'équation différentielle $y' = y$ sont de la forme

$$t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) = Ce^t,$$

où C est une constante réelle.

Si on trace les graphes de toutes les solutions de l'équation différentielle (1.13), on voit qu'on a « stratifié » tout le plan : par tout point (t_0, y_0) du plan, il passe une et une seule solution de (1.13) ; de manière tout à fait précise, cette solution est

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto y_0\, e^{t-t_0}.$$

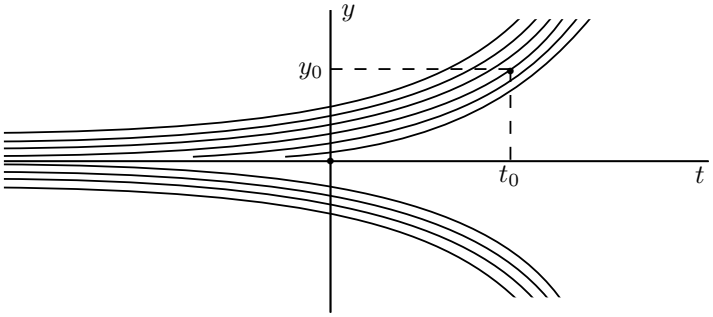


Figure 2

1.3 Équations différentielles linéaires (scalaires) du 1er ordre à coefficients constants

Il s'agit d'équations différentielles linéaires du type suivant :

$$\boxed{ay' + by = c(t), \quad t \in I} \tag{ed}_1$$

où I est un *intervalle ouvert* de $\mathbb{R}$, a et b sont des constantes réelles (avec $a \neq 0$, sinon c'est une trivialité), et $c : I \to \mathbb{R}$ est une fonction *continue* sur I.
Tous les qualificatifs associés à « équations différentielles » dans le titre du paragraphe ont une importance :

- « scalaire » signifie qu'on traite des fonctions numériques y, ou, si l'on préfère, à valeurs réelles. Ce sera toujours le cas dans ce chapitre.
- « du 1er ordre » signifie que c'est la dérivée première y' de y qui apparaît, rien de plus.
- « à coefficients constants » : les coefficients devant y et y' sont des constantes, ils ne dépendent pas de t.
- « linéaire ». Ca, c'est vraiment important. Il signifie que la relation entre y et y' est linéaire, c'est-à-dire que y et y' apparaissent de manière séparée et avec une puissance égale à 1. Ainsi, l'équation différentielle $y' + y^2 = 0$ a toutes les qualités énoncées plus haut, mais elle n'est pas linéaire (à cause du y^2).

Pour des raisons qui apparaîtront en cours de route, nous sommes conduits à distinguer le cas où $c = 0$ et le cas (général) où c est une fonction continue quelconque.

1.3.1 Situation où le second membre c de $(\text{ed})_1$ est la fonction nulle

Nous sommes donc à la recherche de fonctions $y : t \in I \mapsto y(t)$ dérivables telles que

$$ay'(t) + by(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \in I. \tag{ed}_{1,0}$$

Nous verrons rapidement que I n'a aucune importance ici, il pourra être pris égal à $\mathbb{R}$ tout entier ; il réapparaîtra lorsqu'il s'agira de résoudre $(\text{ed})_1$.
On dit parfois que $(\text{ed})_{1,0}$ est l'équation différentielle *homogène* ou *sans second membre* associée à $(\text{ed})_1$. Cette deuxième appellation est quelque peu abusive car il y a bien un second membre... sauf qu'il est nul. Ici, comme ailleurs, l'indice 0 de $(\text{ed})_{1,0}$ sera là pour rappeler que le second membre a été mis à 0.
La résolution de $(\text{ed})_{1,0}$ est du même tonneau que celle vue en deuxième partie du § 1.2.

Théorème 1.3.1 Toutes les solutions de l'équation différentielle $(\text{ed})_{1,0}$ sont de la forme

$$t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) = Ce^{-\frac{b}{a}t}, \tag{1.15}$$

où C est une constante réelle.

Démonstration : Soit z la nouvelle fonction (de t) définie par

$$z(t) := e^{\frac{b}{a}t}\, y(t).$$

Si y est dérivable sur I, il en est de même de z, avec

$$z'(t) := e^{\frac{b}{a}t}\, y'(t) + \frac{b}{a}\, e^{\frac{b}{a}t} y(t).$$

Par suite, demander que $y'(t)+\dfrac{b}{a}y(t) = 0$ (ce qui est $(\mathrm{ed})_{1,0}$) équivaut à demander que $z'(t) = 0$. Sur l'intervalle I, cela revient donc à ce que

$$z : t \in I \mapsto e^{\frac{b}{a}t}\, y(t)$$

soit une (fonction) constante C. C'est exactement la forme annoncée dans (1.15).
Aucune restriction ne s'est imposée sur I, « qui peut le plus peut le moins », on peut donc considérer $(\mathrm{ed})_{1,0}$ résolue avec $I = \mathbb{R}$. □

Il y a un moyen facile de retenir le résultat du Théorème 1.3.1, moyen que nous retrouverons plus loin à plusieurs occasions. Considérons l'équation linéaire (du 1er ordre) en r associée à $(\mathrm{ed})_{1,0}$ de la manière schématisée que voici :

$$\begin{array}{ccccc} a\, y' & + & b\, y & = & 0 \\ \downarrow\downarrow & & \downarrow & & \\ a\, r & + & b & = & 0. \end{array} \tag{1.16}$$

Le nombre réel $r = -\dfrac{b}{a}$ est la solution de l'équation $ar + b = 0$. Les solutions de $(\mathrm{ed})_{1,0}$ sont donc les fonctions exponentielles $t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) = Ce^{rt}$, où r est la (seule) solution de l'équation $ar + b = 0$ (associée à $ay' + by = 0$).

1.3.2 Situation où le second membre c de $(\mathrm{ed})_1$ est une fonction continue

Revenons à l'équation différentielle $(\mathrm{ed})_1$. Qui nous assure qu'il y a des solutions ? Si oui, ces solutions sont-elles définies sur tout l'intervalle I proposé, ou seulement sur une partie de I ? Nous répondrons à ces deux interrogations. Pour cela, notons les deux faits suivants :

— Soit $C : t \in I \mapsto C(t)$ une primitive de $t \mapsto \dfrac{c(t)}{a}\, e^{\frac{b}{a}t}$ sur I, c'est-à-dire une fonction C telle que

$$C'(t) = \frac{c(t)}{a}\, e^{\frac{b}{a}t} \quad \text{pour tout } t \in I. \tag{1.17}$$

Cette demande est licite puisque la fonction $t \mapsto \dfrac{c(t)}{a}\, e^{\frac{b}{a}t}$ est continue sur I et que toute fonction continue sur I admet des primitives sur I (d'ailleurs quand on en a une, on les a toutes puisqu'il suffit de lui ajouter des constantes).
Alors, nous prétendons que la fonction

$$t \in I \mapsto y_p(t) = C(t)e^{-\frac{b}{a}t} \tag{1.18}$$

est une solution de $(\mathrm{ed})_1$. En effet,

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= C'(t)e^{-\frac{b}{a}t} + C(t)\left(-\frac{b}{a}\right)e^{-\frac{b}{a}t} \\ &= \frac{c(t)}{a} - \frac{b}{a}y_p(t) \quad \text{[d'après (1.17) et (1.18)]} \end{aligned}$$

Ceci se réécrit en

$$ay_p'(t) + by_p(t) = c(t),\ t \in I,$$

ce qui était annoncé.

Donc, nous sommes assurés de l'*existence* de solutions de $(\text{ed})_1$ définies sur I tout entier.

Au lecteur-étudiant : Inutile de retenir la construction de y_p ci-dessus, elle sera revue au chapitre suivant, accompagnée d'une méthodologie. S'il considère que la proposition de y_p est « parachutée » et mystérieuse, il a complètement raison...

— Si y_1 et y_2 sont deux solutions de $(\text{ed})_1$, alors $y_1 - y_2$ est solution de $(\text{ed})_{1,0}$.

Pour voir cela, la « linéarité » de l'équation différentielle étudiée ainsi que la linéarité de l'opération de dérivation joueront pleinement leur rôle.

En effet, avoir

$$ay_1'(t) + by_1(t) = c(t)$$

et

$$ay_2'(t) + by_2(t) = c(t)$$

implique

$$a\left[y_1'(t) - y_2'(t)\right] + b\left[y_1(t) - y_2(t)\right] = 0 \quad (c(t) \text{ a disparu !}).$$

Comme $y_1'(t) - y_2'(t) = (y_1 - y_2)'(t)$, ce qui est au-dessus indique que $z := y_1 - y_2$ vérifie la relation différentielle figurant dans $(\text{ed})_{1,0}$.

Réciproquement, soit y_p une solution de $(\text{ed})_1$ et z une solution de $(\text{ed})_{1,0}$; alors, les mêmes propriétés de linéarité invoquées plus haut assurent que $y_p + z$ est une solution de $(\text{ed})_1$.

Tout cela pour arriver au résultat que voici :

Théorème 1.3.2 Toutes les solutions y de l'équation différentielle $(\text{ed})_1$ sont de la forme

$$y = y_p + z, \tag{1.19}$$

où y_p est une solution de $(\text{ed})_1$ et z une solution de $(\text{ed})_{1,0}$.
Elles sont en particulier définies sur tout l'intervalle I.

y_p est parfois appelée « une solution particulière de $(\text{ed})_1$ »... elle n'a rien de particulier, sauf que c'est une solution de l'équation complète $(\text{ed})_1$.

Retenons la structuration des solutions de $(\text{ed})_1$:

$$t \in I \mapsto y(t) = y_p(t) + Ce^{rt}, \tag{1.20}$$

où $y_p : I \to \mathbb{R}$ est *une* solution de $(\text{ed})_1$;
r est la solution de l'équation $ar + b = 0$ (associée à $ay' + by = 0$);
C est une constante réelle (quelconque).

Si $t_0 \in I$ et si $y_0 \in \mathbb{R}$, la condition de « passage obligé » $y(t_0) = y_0$ pour une solution y de $(\text{ed})_1$ permet de déterminer sans ambiguïté la constante C dans (1.20). Ainsi, pour tout

point (t_0, y_0) de $I \times \mathbb{R}$, il passe une et une seule solution de $(\text{ed})_1$.
Le problème

$$(\mathscr{C}) \begin{cases} (\text{ed})_1 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

est appelé *problème de* CAUCHY. On vient de voir que $(\mathscr{C})$ a une et une seule solution.

1.3.3 Deux exemples simples en Physique

• Circuit RC – charge d'un condensateur

Dans ce contexte (que nous ne détaillerons pas ici), les relations courant-tension conduisent à l'équation différentielle relative à la tension $t \mapsto u(t)$ que voici

$$RC \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = E. \tag{1.21}$$

Ici, E, R et C sont des constantes physiques (force électromotrice, résistance, capacité). Pour alléger les écritures, il nous arrivera d'utiliser $\tau = RC$ (appelée *constante de temps* du circuit RC).
Ici la variable est t, la fonction (de t) recherchée est u. L'équation différentielle (1.21) est bien du type de celles étudiées au § 1.3.2.
L'équation différentielle homogène (ou sans second membre) associée à (1.21) est

$$RC \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = 0. \tag{1.22}$$

Par ailleurs, puisque E est une constante, une solution (particulière) de l'équation complète (1.21) est $t \in \mathbb{R} \mapsto u_p(t) = E$. Par conséquent, au vu du Théorème 1.3.2, toutes les solutions de l'équation différentielle (1.21) sont de la forme

$$t \in \mathbb{R} \mapsto u(t) = E + Ke^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\text{rappel} : \tau = RC),$$

où K est une constante réelle (quelconque). Si on ajoute la condition $u(0) = 0$, K est parfaitement déterminée, $K = -E$, de sorte que *la* solution du problème de CAUCHY

$$\begin{cases} \tau \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = E \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

est $t \in \mathbb{R} \mapsto u(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$. En voici une représentation graphique, pour $t \geq 0$ seulement.

• Décroissance radioactive

L'étude de la décroissance radioactive conduit à une équation différentielle du type suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N(t) \\ N(0) = N_0, \end{cases} \tag{1.23}$$

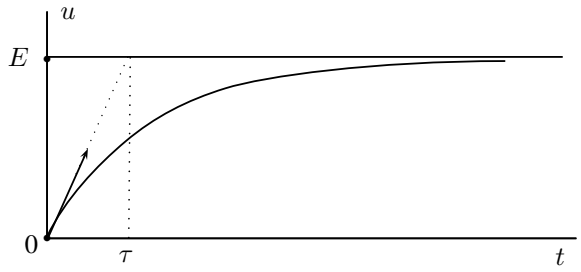


Figure 3

$$u'(0) = \frac{E}{c}, \;\; u(t) \to E \text{ quand } t \to +\infty.$$

où $\lambda > 0$ est une constante de radiation qui dépend du noyau considéré.
Ici la variable est encore t, la fonction (de t) recherchée est N. Avec ce que nous avons vu au § 1.3.2, il n'y a aucune difficulté à montrer que *la* solution de (1.23) est

$$t \in \mathbb{R} \mapsto N(t) = N_0 \, e^{-\lambda t}. \tag{1.24}$$

Comme N décroît (exponentiellement) avec t (signifiant le temps ici), on est intéressé à savoir à quelle date T on aura $N(T) = \dfrac{N_0}{2}$. Cette valeur T est appelée *demi-vie* ou *période*. Avec l'expression (1.24), il est facile d'obtenir que

$$T = \frac{1}{\lambda} \ln 2.$$

En conséquence, $N(t)$ est parfois réécrite sous le format

$$N(t) = N_0 \, 2^{-\frac{t}{T}}. \tag{1.25}$$

Voici une représentation graphique (Figure 4) de $N(t)$, pour $t \geq 0$ uniquement.

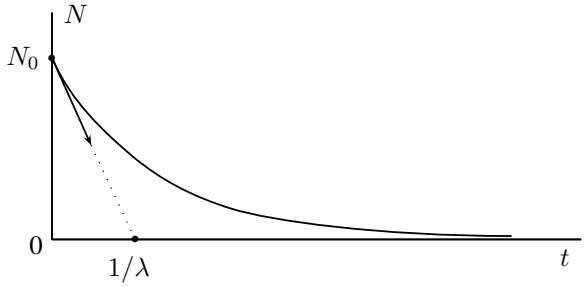


Figure 4

$$N'(0) = -\lambda N_0, \;\; N(t) \to 0 \text{ quand } t \mapsto +\infty.$$

⋆ 1.3.4 Un prolongement possible

Dans tout le paragraphe 1.2 ou paragraphe 1.3, un ingrédient essentiel à été l'existence (puis le calcul) d'une primitive d'une fonction continue sur un intervalle I,

$$y' = c(t), \quad t \in I, \tag{1.26}$$

lequel n'est ni plus ni moins qu'un cas particulier de $(\text{ed})_1$ (avec $a = 1$ et $b = 0$).
Un lecteur-étudiant curieux (il y en a !) pourra se poser la question du sens qu'il faudrait donner à la « primitivation » posée en (1.26), et donc à la résolution de $(\text{ed})_1$, lorsque c n'est pas une fonction continue... pas trop méchante tout de même. Donnons une idée, juste une idée, de ce que pourraient être des réponses adéquates.
Supposons $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue par morceaux*, ce qui veut dire : il existe des points $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_k$ tels que :

> c est continue en tout point t autre que les τ_i ;
> en tout point τ_i, c a une limite à gauche et une limite à droite.

Les valeurs prises par c aux points τ_i n'ont finalement que peu d'importance.

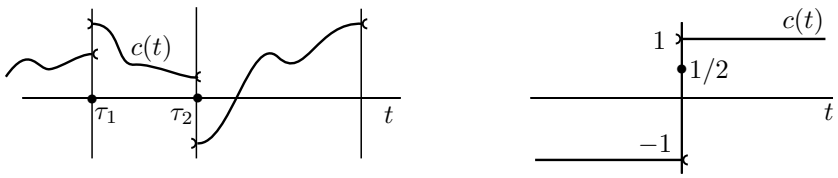


Figure 5

Dans l'exemple à droite de la Figure 5, c a une limite à droite en 0 qui vaut $+1$, une limite à gauche en 0 qui vaut -1. Si, avec cette fonction c, on considère l'équation

$$y' = c(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.27}$$

celle-ci n'a pas de solution : il n'y a pas de fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $y' = c(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Cela peut se voir grâce au théorème suivant, dû à G.Darboux (1875) : toute fonction dérivée y' (même si elle n'est pas continue) vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire que l'image $y'(I)$ de tout intervalle I est un intervalle. Or cette propriété n'est pas vérifiée par la fonction c considérée au-dessus (par exemple, $c\,]-1, +1[) = \{-1, 1/2, 1\}$).
Le lecteur-étudiant aura sans doute « intuité » (comme on dit en Midi-Pyrénées) que $y : t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) = |t|$ serait une bonne candidate comme solution de substitution de (1.27). C'est effectivement le cas ; pour une fonction continue par morceaux c, la fonction

$$t \mapsto y(t) := \int_{t_0}^{t} c(s)\mathrm{d}s$$

se trouve être continûment dérivable par morceaux (définition non détaillée ici) et vérifie « $y' = c$ » dans un sens satisfaisant. Mais nous n'irons pas plus loin dans cette direction ; c'est juste de quoi alimenter la réflexion.

1.4 Équations différentielles linéaires (scalaires) du 2^{eme} ordre à coefficients constants

Il s'agit d'équations différentielles linéaires du type suivant :

$$\boxed{ay'' + by' + cy = d(t), \quad t \in I} \qquad (\text{ed})_2$$

où I est un *intervalle ouvert* de $\mathbb{R}$, a, b, et c sont des constantes réelles (avec $a \neq 0$, sinon ce n'est plus une équation différentielle du 2^{e} ordre), et $d : I \to \mathbb{R}$ est une fonction *continue* sur I. Comme dans le cas d'équations différentielles du 1^{er} ordre (*cf.* début du § 1.3), tous les qualificatifs ont leur importance, notamment « linéaire » et « à coefficients constants ».
Dans ce contexte, l'équation différentielle la plus simple est

$$y'' = 0. \qquad (1.28)$$

Comme $y'' = (y')'$, la résolution de (1.28) ne pose pas de difficulté : toutes les solutions de (1.28) sont de la forme

$$t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) = C_1 + C_2 t,$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles. On note donc qu'il y a *deux* constantes « baladeuses », C_1 et C_2. Malheureusement, contrairement à ce qui se passait pour le 1^{er} ordre (§ 1.3.1), une équation différentielle comme $(\text{ed})_2$ ne se réduit pas, après un changement de fonctions inconnues, à une équation différentielle comme (1.28).
Le terme intermédiaire by' n'est pas le plus gênant dans $(\text{ed})_2$, on peut même le « tuer »... En effet, avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$, posons $z(t) = e^{-\alpha t} y(t)$. Voyons comment ce changement de fonctions modifie $(\text{ed})_2$. On a

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\alpha t} z(t), \quad y'(t) = e^{\alpha t} \left[\alpha\, z(t) + z'(t)\right], \\ y''(t) &= e^{\alpha t} \left[\alpha^2 z(t) + 2\,\alpha\, z'(t) + z''(t)\right]. \end{aligned}$$

Ainsi, y est solution de $(\text{ed})_2$ *équivaut* à : z est solution de

$$az'' + (2\,a\,\alpha + b)\, z' + \left(a\,\alpha^2 + b\,\alpha + c\right) z = e^{-\alpha t} d(t), \quad t \in I. \qquad (1.29)$$

Comme $2\,a\,\alpha + b = 0$, (α a été choisi pour !), la nouvelle équation différentielle (en la fonction inconnue z) est de la forme

$$z'' + kz = \delta(t), \quad t \in I. \qquad (1.30)$$

Moralité : Si on sait résoudre des équations différentielles du type (1.30), on saura résoudre des équations différentielles générales comme $(\text{ed})_2$.

Le coefficient α utilisé dans notre transformation, $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$, servira d'explication aux expressions générales des solutions de $(\text{ed})_2$ que l'on mettra en évidence aux paragraphes suivants.
Comme dans le cas du 1er ordre, la « linéarité » de l'équation différentielle $(\text{ed})_2$ en jeu nous conduit à distinguer le cas où $d = 0$ et le cas (général) où d est une fonction continue quelconque.

1.4.1 Situation où le second membre de $(\text{ed})_2$ est la fonction nulle

Nous cherchons donc (toutes) les fonctions $y : t \in I \mapsto y(t)$ deux fois dérivables telles que

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \in I. \qquad (\text{ed})_{2,0}$$

Nous verrons que l'intervalle I pourra être pris « le plus grand possible », c'est-à-dire $I = \mathbb{R}$, mais nous ne pouvons pas en préjuger ; il réapparaîtra tel qu'il est dans $(\text{ed})_2$ lorsqu'il s'agira de résoudre $(\text{ed})_2$. Ici aussi, $(\text{ed})_{2,0}$ s'appelle l'équation différentielle *homogène* ou *sans second membre* associée à $(\text{ed})_2$.
Les fonctions exponentielles $t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) = e^{rt}$, où r est un nombre réel, ont la particularité que leurs dérivées ont des allures du même type :

$$y' : t \in \mathbb{R} \mapsto y'(t) = re^{rt}, \quad y'' : t \in \mathbb{R} \mapsto y''(t) = r^2e^{rt} = r^2y(t).$$

Par suite, tenter une solution de $(\text{ed})_{2,0}$ qui serait de la forme $t \mapsto e^{rt}$ conduit à

$$\left(ar^2 + br + c\right) e^{rt} = 0 \quad \text{pour tout } t \in I,$$

ce qui équivaut à exiger de r de vérifier

$$ar^2 + br + c = 0. \qquad (\text{ec})$$

Oui, mais est-ce possible ? N'oublions pas que nous sommes à la recherche de solutions (fonctions) *réelles* de $(\text{ed})_{2,0}$ et donc de *réels* r vérifiant (ec). Or, on a appris quand on était petit, que ça n'était pas toujours possible, que cela dépendait du signe du déterminant, euh... du discriminant, $\Delta = b^2 - 4ac$.
Si $\Delta > 0$, on est assuré de l'existence de deux réels distincts solutions de (ec). Si $\Delta = 0$, il y a un seul réel (mais qui compte double !) solution de (ec). Et si $\Delta < 0$? Alors, il faut aller chercher des racines complexes : $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$, avec $\beta \neq 0$, sont les deux racines complexes conjuguées de (ec). Oui, et alors ? On fait appel aux fonctions trigonométriques $t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) = \cos(\beta t)$ ou $\sin(\beta t)$. Comme pour les fonctions exponentielles, ces fonctions ont la particularité d'avoir leurs dérivées secondes du même type :

$$y'' : t \in \mathbb{R} \mapsto y''(t) = -\beta^2 y(t).$$

Nous allons exploiter toutes ces informations pour résoudre $(\text{ed})_{2,0}$ dans tous les cas de figure.
Retenons la forme de (ec) et sa construction :

$$\begin{array}{ccccccc} a\,y'' & + & b\,y' & + & c\,y & = & 0 \\ \downarrow\downarrow & & \downarrow\downarrow & & \downarrow & & \\ a\,r^2 & + & b\,r & + & c & = & 0. \end{array}$$

L'équation (ec) est appelée l'*équation caractéristique* (associée à l'équation différentielle $(\text{ed})_{2,0}$). On dit aussi que ar^2+br+c est le *trinôme caractéristique* associé à l'équation différentielle [1]. Le qualificatif de « caractéristique » sera expliqué plus loin, au chapitre 4.

1.4.1.1 Cas où l'équation caractéristique a deux solutions réelles distinctes (c'est-à-dire lorsque $\Delta > 0$)

Rappelons que dans ce cas les deux solutions de (ec) sont

$$r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}. \tag{1.31}$$

On dit aussi que r_1 et r_2 sont racines simples du trinôme ax^2+bx+c,

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}\,x+\frac{c}{a}\right) = a(x-r_1)(x-r_2).$$

Notons pour la suite que

$$r_1-r_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}, \quad 2\,a\,r_1+b = \sqrt{\Delta}, \quad 2\,a\,r_2+b = -\sqrt{\Delta}. \tag{1.32}$$

Avec ce qui a été exposé au début du § 1.4.1, les fonctions

$$t\in\mathbb{R}\mapsto y_1(t) = e^{r_1 t}$$

et

$$t\in\mathbb{R}\mapsto y_2(t) = e^{r_2 t}$$

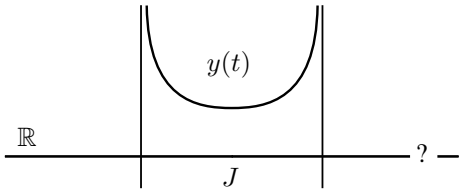
sont solutions de $(\text{ed})_{2,0}$. C'est toujours ça... De plus, comme $(\text{ed})_{2,0}$ est une équation différentielle dite linéaire et que l'opération de dérivation est également linéaire ($(y_1+y_2)' = y_1'+y_2'$, $(ky)' = ky'$, $(y_1+y_2)'' = y_1''+y_2''$), les fonctions

$$\begin{array}{rcl} t\in\mathbb{R}\mapsto y(t) & = & C_1y_1(t)+C_2y_2(t) \\ & = & C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t}, \end{array} \tag{1.33}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles (quelconques), sont aussi solutions de $(\text{ed})_{2,0}$. Nous avons bien avancé... mais ce n'est pas fini, il reste à faire l'essentiel peut-être : *qui nous dit qu'il n'y a pas de solutions de* $(\text{ed})_{2,0}$ *d'une forme autre que celles décrites en (1.33), voire définies (seulement) sur un intervalle* J *qui serait plus petit que* $\mathbb{R}$, comme dans la figure au-dessus par exemple ?

C'est à répondre à ces questions que nous nous attachons à présent. En fait, il n'y pas d'autres solutions à $(\text{ed})_{2,0}$ que celles de (1.33).

1. Une question de terminologie : les *équations* ont des *solutions* ; les *polynômes* (ou fonctions polynomiales) ont des *racines*. Mais, parler de *racine d'une équation* (polynomiale) est un abus de langage dans lequel nous tombons parfois... et qui est acceptable.



Théorème 1.4.1 Toutes les solutions de $(\mathrm{ed})_{2,0}$ sont de la forme

$$t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t},$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.

Démonstration : Soit $z : t \in J \mapsto z(t)$ une solution de $(\mathrm{ed})_{2,0}$. Nous allons démontrer que z est forcément de la forme $t \mapsto z(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$, et donc que rien de nouveau n'est apporté par rapport aux solutions déjà exhibées (en (1.33)). Comme ces dernières sont définies sur $J = \mathbb{R}$ tout entier, c'est bien le mieux qu'on puisse faire.
A l'aide de r_1, solution de (ec), opérons le changement de fonctions

$$z(t) = e^{-r_1 t} y(t), \quad \text{soit encore} \quad y(t) = e^{r_1 t} z(t).$$

Des calculs de dérivées, déjà faits en page 24, nous amènent à

$$az'' + (2ar_1 + b)z' + (ar_1^2 + br_1 + c)z = 0.$$

Comme $ar_1^2 + br_1 + c = 0$ et que $2ar_1 + b = \sqrt{\Delta} \quad (> 0)$, nous avons à résoudre

$$az'' + \sqrt{\Delta} z' = 0.$$

Ceci est une « fausse » équation différentielle du 2$^{\mathrm{e}}$ ordre... En posant $z' = u$, on a à résoudre

$$au' + \sqrt{\Delta} u = 0, \tag{1.34}$$

puis $z' = u$. Les solutions de (1.34) sont

$$t \in \mathbb{R} \mapsto u(t) = D_1 e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{a} t},$$

où D_1 est une constante réelle. Par suite, la résolution de $z' = u$ conduit à

$$t \in \mathbb{R} \mapsto z(t) = D_1 \left(-\frac{a}{\sqrt{\Delta}} \right) e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{a} t} + D_2, \tag{1.35}$$

où D_2 est une constante réelle. Comme $-\dfrac{a}{\sqrt{\Delta}} = \dfrac{1}{r_2 - r_1}$,

$$z(t) = \frac{D_1}{r_2 - r_1} e^{(r_2 - r_1)t} + D_2,$$

puis

$$y(t) = e^{r_1 t} z(t) = \frac{D_1}{r_2 - r_1} e^{r_2 t} + D_2 e^{r_1 t}.$$

D_1 et D_2 étant deux constantes réelles quelconques, on a bien le format annoncé des solutions.

□

1.4.1.2 Cas où l'équation caractéristique a une seule solution (réelle) (c'est-à-dire lorsque $\Delta = 0$)

Rappelons que dans ce cas la solution de (ec) est

$$r = -\frac{b}{2a}.$$

On dit aussi que r est racine double du polynôme $ax^2 + bx + c$,

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a(x - r)^2.$$

A l'aide de la solution r de (ec), on opère le même changement de fonctions qu'au paragraphe précédent

$$z(t) = e^{-rt} y(t), \quad \text{soit encore} \quad y(t) = e^{rt} z(t).$$

Les calculs de dérivées déjà faits conduisent à la constatation suivante : y est solution de $(\mathrm{ed})_{2,0}$ si et seulement si

$$az'' = 0.$$

Les solutions de cette équation différentielle étant connues, ce sont les fonctions

$$t \in \mathbb{R} \mapsto C_1 + C_2 t,$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles, nous pouvons conclure avec le théorème qui suit.

Théorème 1.4.2 Toutes les solutions de $(\mathrm{ed})_{2,0}$ sont de la forme

$$t \in \mathbb{R} \mapsto (C_1 + C_2 t)\, e^{rt},$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.

1.4.1.3 Cas où l'équation caractéristique n'a pas de solutions réelles (c'est-à-dire lorsque $\Delta < 0$)

Ici, pas de racine réelle pour (ec), pas moyen donc de factoriser le polynôme $ax^2 + bx + c$ mieux que ce qu'il est (c'est-à-dire avec des facteurs qui seraient des polynômes du 1$^{\text{er}}$degré), si du moins on se restreint à ne travailler qu'avec des nombres réels. Cela dit, (ec) a des solutions complexes conjuguées

$$r_1 = \alpha + i\beta \quad \text{et} \quad r_2 = \alpha - i\beta, \quad \text{avec} \quad \beta \neq 0.$$

Si on veut être plus précis,

$$r_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad r_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \tag{1.36}$$

soit $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ (on aurait pu aussi choisir $\beta = -\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$).

On peut donc factoriser

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2),$$

en sortant du champ réel, en acceptant des facteurs polynômes à coefficients complexes. Oui... mais à quoi cela sert-il puisqu'on cherche des fonctions solutions réelles de $(\text{ed})_{2,0}$? La démarche est ici un peu plus subtile qu'aux deux paragraphes précédents et mérite d'être menée en détail. Commençons par alléger l'écriture en « tuant » le terme intermédiaire by' de $(\text{ed})_{2,0}$, selon la propriété indiquée au début du § 1.4. Avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$, faisons le changement de fonctions $z(t) = e^{-\alpha t}y(t)$. On a alors (cf. calculs de la page 24) :
y est solution de $(\text{ed})_{2,0}$ si et seulement si

$$az'' + (a\alpha^2 + b\alpha + c)z = 0,$$
$$z'' + (\alpha^2 + \frac{b}{a}\alpha + \frac{c}{a})z = 0.$$

Or, $\alpha^2 + \dfrac{b}{a}\alpha + \dfrac{c}{a} = \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a^2} = \dfrac{-\Delta}{4a^2} = \beta^2 > 0.$

On est donc confronté à la résolution de l'équation différentielle

$$z'' + \beta^2 z = 0, \quad \text{avec} \quad \beta \neq 0. \tag{1.37}$$

Cela constitue le cœur du paragraphe. Il a déjà été noté que les fonctions trigonométriques

$$t \in \mathbb{R} \mapsto z_1(t) = \cos(\beta t)$$
et
$$t \in \mathbb{R} \mapsto z_2(t) = \sin(\beta t)$$

sont solutions de (1.37). Comme (1.37) est une équation différentielle linéaire et que l'opération de dérivation est également linéaire, les fonctions

$$\begin{aligned} t \in \mathbb{R} \mapsto z(t) &= C_1 z_1(t) + C_2 z_2(t) \\ &= C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t), \end{aligned} \tag{1.38}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles (quelconques), sont aussi solutions de (1.37). Mais l'essentiel reste à faire : *qui nous dit qu'il n'y a pas de solutions de* (1.37) *d'une forme autre que celles décrites en* (1.38)*, voire définies (seulement) sur un intervalle J qui serait plus petit que* $\mathbb{R}$? Nous démontrons ci-dessous qu'il n'y a pas d'autre solutions à (1.37) que celles décrites en (1.38).

Théorème 1.4.3 Toutes les solutions de l'équation différentielle $z'' + \beta^2 z = 0, \beta \neq 0$, sont de la forme

$$t \in \mathbb{R} \mapsto z(t) = C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t),$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.

Démonstration : Soit $z : t \in J \mapsto z(t)$ une solution de (1.37). Nous allons démontrer que z est nécessairement de la forme $t \mapsto z(t) = C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)$, et donc que rien de nouveau n'est apporté par rapport aux solutions déjà exhibées en (1.38). Comme ces dernières sont définies sur $J = \mathbb{R}$ tout entier, c'est bien le mieux qu'on puisse faire.
Définissons

$$\left.\begin{array}{l} t \in J \mapsto c_1(t) := z(t)\cos(\beta t) - \dfrac{1}{\beta} z'(t)\sin(\beta t) \\ \\ t \in J \mapsto c_2(t) := z(t)\sin(\beta t) + \dfrac{1}{\beta} z'(t)\cos(\beta t). \end{array}\right\} \tag{1.39}$$

Des simples calculs de dérivées conduisent à

$$\begin{aligned} c_1'(t) &= \cancel{z'(t)\cos(\beta t)} - \beta z(t)\sin(\beta t) - \frac{1}{\beta} z''(t)\sin(\beta t) - \cancel{z'(t)\cos(\beta t)} \\ &= -\frac{1}{\beta}\sin(\beta t)\left[z''(t) + \beta^2 z(t)\right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2'(t) &= \cancel{z'(t)\sin(\beta t)} + \beta z(t)\cos(\beta t) + \frac{1}{\beta} z''(t)\cos(\beta t) - \cancel{z'(t)\sin(\beta t)} \\ &= \frac{1}{\beta}\cos(\beta t)\left[z''(t) + \beta^2 z(t)\right]. \end{aligned}$$

Comme $z'' + \beta^2 z = 0$, on en déduit que $c_1' = c_2' = 0$, et donc que les fonctions c_1 et c_2 sont constantes sur J (désignées par C_1 et C_2).
On obtient ensuite $z(t)$ et $z'(t)$ en résolvant (1.39), qui n'est autre qu'un système linéaire de deux équations à deux inconnues

$$\begin{bmatrix} \cos(\beta t) & -\dfrac{1}{\beta}\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \dfrac{1}{\beta}\cos(\beta t) \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} z(t) \\ \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit $z(t) = C_1\cos(\beta t) + C_2\sin(\beta t)$ (et, si l'on y tient, $z'(t) = -C_1\beta\sin(\beta t) + \beta C_2\cos(\beta t)$).
Et le tour est joué !
L'introduction *deus ex machina* des fonctions c_1 et c_2 de (1.39) a de quoi surprendre... Cela sera expliqué plus loin, au chapitre 3. □

Nous sommes prêts à présent pour le résultat final de ce paragraphe

Théorème 1.4.4 Toutes les solutions de $(\mathrm{ed})_{2,0}$ sont de la forme

$$t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) = C_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + C_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t), \tag{1.40}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.

1.4.1.4 Quelques observations ultimes et tableau-résumé

• Expressions différentes des solutions

Lorsque l'équation caractéristique a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, que l'on peut exprimer sous la forme $r_1 = \alpha + \beta$ et $r_2 = \alpha - \beta$ (avec, tout simplement, $\alpha = \dfrac{r_1 + r_2}{2} = -\dfrac{b}{a}$ et $\beta = \dfrac{r_1 - r_2}{2} = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$), la solution générale de $(\text{ed})_{2,0}$ est

$$t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) = e^{\alpha t}\left(C_1 e^{\beta t} + C_2 e^{-\beta t}\right),$$

que l'on peut encore écrire

$$e^{\alpha t}\left(D_1 \frac{e^{\beta t} + e^{-\beta t}}{2} + D_2 \frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2}\right),$$

avec $D_1 = C_1 + C_2$ et $D_2 = C_1 - C_2$. Or, avoir « C_1 et C_2 deux constantes réelles quelconques » équivaut à avoir « D_1 et D_2 deux constantes réelles quelconques » (on est d'accord ?). On a ainsi une formulation des solutions de $(\text{ed})_{2,0}$, alternative à celle donnée au Théorème 1.4.1 :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) = D_1 e^{\alpha t}\text{ch}(\beta t) + D_2 e^{\alpha t}\text{sh}(\beta t), \tag{1.41}$$

où D_1 et D_2 sont des constantes réelles. Cette formulation (1.41) est à rapprocher de sa cousine (1.40).

La forme (1.41) est à connaître aussi, car dans certains domaines d'applications, elle est plus utilisée que celle du Théorème 1.4.1.

Lorsque l'équation caractéristique (ec) a deux solutions complexes conjuguées, les deux « paramètres libres » C_1 et C_2 sont parfois intégrés de manière différente dans l'expression générale des solutions de $(\text{ed})_{2,0}$. En effet, si $C_1 \neq 0$, le coefficient $\dfrac{C_2}{C_1}$ peut être vu comme la tangente d'un $\phi \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, de sorte que

$$\begin{aligned} C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t) &= C_1\left[\cos(\beta t) + \tan\phi \sin(\beta t)\right] \\ &= \frac{C_1}{\cos\phi}\left[\cos(\beta t)\cos\phi + \sin\phi \sin(\beta t)\right] \\ &= \frac{C_1}{\cos\phi}\cos(\beta t - \phi). \end{aligned}$$

On peut donc écrire la solution générale sous une forme différente de celle donnée au Théorème 1.4.4 :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) = C e^{\alpha t}\cos(\beta t - \phi), \tag{1.42}$$

où C et ϕ sont des constantes réelles [2].

En Physique ou en Mécanique, c'est plus fréquemment (1.42) qui est utilisée (ϕ est un *angle de déphasage*).

---

2. Le cas où $C_1 = 0$ est intégré dans cette formule en acceptant, par exemple, $\phi = \dfrac{\pi}{2}$; en effet $\cos(\alpha - \dfrac{\pi}{2}) = -\sin\alpha$.
Si on accepte des ϕ quelconques, on peut même s'en tenir à $C \geq 0$; en effet $\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$.

• Avant de donner le tableau-résumé, nous insistons sur *les deux exemples fondamentaux de base qui sont* :

$$\boxed{(\Diamond) \qquad y'' - \omega^2 y = 0, \quad \text{où} \quad \omega > 0.}$$

La solution générale de cette équation différentielle est

$$t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} \quad (C_1 \text{ et } C_2 \text{ réels})$$

ou bien

$$t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) = D_1 \mathrm{ch}\,(\omega t) + D_2 \mathrm{sh}\,(\omega t) \quad (D_1 \text{ et } D_2 \text{ réels})\,.$$

$$\boxed{(\Diamond\Diamond) \qquad y'' + \omega^2 y = 0, \quad \text{où} \quad \omega > 0.}$$

La solution générale de cette équation différentielle est

$$t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) \quad (C_1 \text{ et } C_2 \text{ réels})$$

ou bien

$$t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) = C \cos(\omega t - \phi) \quad (C \text{ et } \phi \text{ réels})\,.$$

On notera que, pour deux équations différentielles qui se ressemblent (juste un changement de signe), les solutions ont des comportements très différents (en termes de périodicité, de comportement quand $t \to +\infty$, etc.).

• **Tableau résumé du § 1.4.1**

Résolution de $ay'' + by' + cy = 0$ $\quad (\mathrm{ed})_{2,0}$

— Si l'équation caractéristique (ec) ($ar^2 + br + c = 0$) a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, toutes les solutions (réelles) de $(\mathrm{ed})_{2,0}$ sont les fonctions de la forme

$$t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad (C_1 \text{ et } C_2 \text{ réels})\,.$$

— Si l'équation caractéristique (ec) a une seule solution réelle r, toutes les solutions (réelles) de $(\mathrm{ed})_{2,0}$ sont les fonctions de la forme

$$t \in \mathbb{R} \mapsto (C_1 + C_2 t)\, e^{rt} \quad (C_1 \text{ et } C_2 \text{ réels})\,.$$

— Si l'équation caractéristique (ec) a deux solutions complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$, toutes les solutions (réelles) de $(\mathrm{ed})_{2,0}$ sont les fonctions de la forme

$$t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) = C_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + C_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t) \quad (C_1 \text{ et } C_2 \text{ réels})\,.$$

• **Un mot sur la structure des solutions de** $(\mathrm{ed})_{2,0}$

Dans chacun des trois cas étudiés au-dessus, la fonction solution générale de $(\mathrm{ed})_{2,0}$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et s'exprime comme une combinaison linéaire des deux fonctions de base

que sont y_1 et y_2. Chaque fois, les deux fonctions y_1 et y_2 mises en évidence sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire :

$$(C_1 y_1 + C_2 y_2 \equiv 0) \Rightarrow (C_1 = 0 \,\text{et}\, C_2 = 0)\,. \tag{1.43}$$

Attention, il y a une difficulté ici, qui arrête (presque) tous les étudiants : ce qui est écrit à gauche de l'implication (1.43) signifie :

$$C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) = 0 \quad \text{pour tout}\, t \in \mathbb{R}. \tag{1.44}$$

Nous retrouverons la même difficulté plus loin, au chapitre 3, lorsque les fonctions y seront à valeurs vectorielles (dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, etc.) et non plus réelles.
Montrons par exemple, « à la main », l'indépendance linéaire des fonctions $y_1 \ : \ t \in \mathbb{R} \mapsto y_1(t) = e^{r_1 t}$ et $y_2 \ : \ t \in \mathbb{R} \mapsto y_2(t) = e^{r_2 t}$ dans le premier cas de figure. La relation de départ est

$$C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} = 0 \quad \text{pour tout}\, t \in \mathbb{R}. \tag{1.45}$$

En dérivant par rapport à t, cela donne

$$r_1 C_1 e^{r_1 t} + r_2 C_2 e^{r_2 t} = 0 \quad \text{pour tout}\, t \in \mathbb{R}. \tag{1.46}$$

La conjonction de (1.45) et de (1.46), c'est-à-dire le système linéaire de deux équations à deux inconnues

$$\begin{bmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

n'a que la solution $C_1 = 0$ et $C_2 = 0$ (on est d'accord ?).
C'est un bon exercice que de faire le même travail dans les deux autres cas de figure.
Nous verrons au chapitre 3 un moyen plus spécifique de vérifier l'indépendance linéaire de deux fonctions solutions d'une équation différentielle.
Désignons par E l'espace vectoriel des fonctions $y \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont continûment dérivables sur $\mathbb{R}$ (E est parfois noté $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$). Ce que l'on vient de dire au-dessus est : *l'ensemble des solutions de* $(\text{ed})_{2,0}$ *est un plan vectoriel de* E.

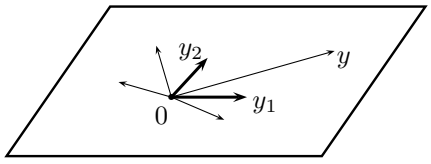


Illustration géométrique

Figure 6

1.4.2 Situation où le second membre de $(\text{ed})_2$ est une fonction continue

Revenons à l'équation différentielle $(\text{ed})_2$

$$ay'' + by' + cy = d(t), \quad t \in I \tag{ed}_2$$

où $d : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur I. Si nous avons réussi à traiter complètement le cas où $d \equiv 0$ (§ 1.4.1), la situation est plus compliquée ici. En effet, qui nous assure qu'il y a des solutions à $(\text{ed})_2$? Si oui, ces solutions sont-elles définies sur tout l'intervalle I de départ, ou seulement sur une partie de I ? Nous répondrons à ces deux interrogations.

1.4.2.1 Existence d'une solution de $(\text{ed})_2$

Nous examinons successivement les trois cas étudiés au § 1.4.1, suivant les racines de l'équation caractéristique (ec) associée à $(\text{ed})_{2,0}$.

• **Cas où l'équation caractéristique a deux solutions réelles r_1 et r_2**
Soient C_1 et C_2 deux fonctions telles que

$$C_1'(t) = \frac{d(t)}{a(r_1 - r_2)}\, e^{-r_1 t} \text{ et } C_2'(t) = \frac{d(t)}{a(r_2 - r_1)}\, e^{-r_2 t} \text{ pour tout } t \in I. \tag{1.47}$$

Ces définitions sont bien licites puisque les deux fonctions dont on prend une primitive sont des fonctions continues sur I.
Nous proposons la fonction

$$y_p \ : \ t \in I \mapsto y_p(t) := C_1(t)e^{r_1 t} + C_2(t)e^{r_2 t},$$

et nous prétendons sur y_p est une solution de $(\text{ed})_2$. Vérifions-le. Nous avons :

$$\begin{aligned}
y_p'(t) &= C_1'(t)e^{r_1 t} + r_1 C_1(t)e^{r_1 t} + C_2'(t)e^{r_2 t} + r_2 C_2(t)e^{r_2 t} \\
&= \cancel{\frac{d(t)}{a(r_1 - r_2)}} + r_1 C_1(t)e^{r_1 t} + \cancel{\frac{d(t)}{a(r_2 - r_1)}} + r_2 C_2(t)e^{r_2 t} \quad \text{[d'après (1.47)]} ; \\
y_p''(t) &= r_1 C_1'(t)e^{r_1 t} + r_1^2 C_1(t)e^{r_1 t} + r_2 C_2'(t)e^{r_2 t} + r_2^2 C_2(t)e^{r_2 t} \\
&= \frac{r_1}{a(r_1 - r_2)} d(t) + r_1^2 C_1(t)e^{r_1 t} + \frac{r_2}{a(r_2 - r_1)} d(t) + r_2^2 C_2(t)e^{r_2 t} \quad \text{[toujours d'après (1.47)]} \\
&= \frac{d(t)}{a} + r_1^2 C_1(t)e^{r_1 t} + r_2^2 C_2(t)e^{r_2 t}.
\end{aligned}$$

Faisons $ay_p''(t) + by_p'(t) + cy_p(t)$. Comme $ar_1^2 + br_1 + c = 0$ et $ar_2^2 + br_2 + c = 0$, il vient

$$ay_p''(t) + by_p'(t) + cy_p(t) = d(t), \quad \text{et ce pour tout } t \in I.$$

• **Cas où l'équation caractéristique a une seule solution réelle**
Soient C_1 et C_2 deux fonctions telles que

$$C_1'(t) = \frac{-td(t)}{a}\, e^{-rt} \quad \text{et} \quad C_2'(t) = \frac{d(t)}{a}\, e^{-rt} \quad \text{pour tout} \quad t \in I. \tag{1.48}$$

Nous proposons la fonction

$$y_p \ : \ t \in I \mapsto y_p(t) := C_1(t)e^{rt} + C_2(t)te^{rt},$$

et nous prétendons que y_p est une solution de $(\text{ed})_2$. En effet,

$$\begin{aligned}
y_p'(t) &= C_1'(t)e^{rt} + C_1(t)re^{rt} + C_2'(t)te^{rt} + C_2(t)(1+rt)e^{rt} \\
&= \cancel{\frac{-td(t)}{a}} + C_1(t)re^{rt} + \cancel{\frac{td(t)}{a}} + C_2(t)(1+rt)e^{rt} \quad \text{[d'après (1.48)]}\,; \\
y_p''(t) &= C_1'(t)re^{rt} + C_1(t)r^2e^{rt} + C_2'(t)(1+rt)e^{rt} + C_2(t)(2r+r^2t)e^{rt} \\
&= \frac{-td(t)r}{a} + C_1(t)r^2e^{rt} + \frac{d(t)(1+rt)}{a} + C_2(t)(r^2t+2r)e^{rt} \quad \text{[toujours d'après (1.48)]} \\
&= \frac{d(t)}{a} + C_1(t)r^2e^{rt} + C_2(t)(r^2t+2r)e^{rt}.
\end{aligned}$$

Faisons $ay_p''(t) + by_p'(t) + cy_p(t)$. Comme $ar^2 + br + c = 0$ et $2ar + b = 0$, il s'ensuit

$$ay_p''(t) + by_p'(t) + cy_p(t) = d(t), \quad \text{et ce pour tout } t \in I.$$

• Cas où l'équation caractéristique a deux solutions complexes conjuguées
Nous considérons l'équation différentielle

$$z'' + \beta^2 z = \delta(t), \quad t \in I \tag{1.49}$$

où $\delta : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur I. Comme cela a été expliqué au § 1.4.1.3, il n'y a pas de perte de généralité à considérer une équation différentielle comme (1.49) plutôt que $(\text{ed})_2$ [un changement de fonctions $y(t) = e^{\alpha t}z(t)$ permet de traiter le cas général] . Les notations et les calculs sont de ce fait plus légers. Nous nous proposons donc de démontrer l'existence d'une solution de (1.49).
Soit C_1 et C_2 deux fonctions telles que

$$C_1'(t) = \frac{\delta(t)}{\beta}\sin(\beta t) \quad \text{et} \quad C_2'(t) = -\frac{\delta(t)}{\beta}\cos(\beta t) \quad \text{pour tout } t \in I. \tag{1.50}$$

Nous proposons la fonction

$$z_p \ : \ t \in \mathbb{R} \mapsto z_p(t) := C_1(t)\cos(\beta t) + C_2(t)\sin(\beta t),$$

et nous démontrons que z_p est effectivement une solution de (1.49). En effet,

$$\begin{aligned}
z_p'(t) &= C_1'(t)\cos(\beta t) - C_1(t)\beta\sin(\beta t) + C_2'(t)\sin(\beta t) + C_2(t)\beta\cos(\beta t) \\
&= \cancel{\frac{\delta(t)}{\beta}\sin(\beta t)\cos(\beta t)} - C_1(t)\beta\sin(\beta t) - \cancel{\frac{\delta(t)}{\beta}\sin(\beta t)\cos(\beta t)} + C_2(t)\beta\cos(\beta t) \\
&\quad \text{[d'après (1.50)]}\,; \\
z_p''(t) &= -C_1'(t)\beta\sin(\beta t) - C_1(t)\beta^2\cos(\beta t) + C_2'(t)\beta\cos(\beta t) - C_2(t)\beta^2\sin(\beta t) \\
&= -\delta(t)\sin^2(\beta t) - \beta^2\left[C_1(t)\cos(\beta t) + C_2(t)\sin(\beta t)\right] - \delta(t)\cos^2(\beta t) \\
&\quad \text{[toujours d'après (1.50)]}\,.
\end{aligned}$$

D'où $z_p''(t) = -\beta^2 z_p(t) + \delta(t)$.
Ce qui avait été annoncé a bien été démontré. □

La proposition d'une solution y_p de $(\text{ed})_2$ via les fonctions définies en (1.47), (1.48) ou (1.50) a de quoi surprendre ; il est inutile de la retenir, elle sera expliquée au chapitre 3, accompagnée d'une manière de procéder générale.

1.4.2.2 Résolution de l'équation différentielle complète $(\text{ed})_2$

Si y_1 et y_2 sont deux solutions de $(\text{ed})_2$, alors $y_1 - y_2$ est solution de $(\text{ed})_{2,0}$. Ici encore, la « linéarité » de l'équation différentielle considérée, ainsi que la linéarité de l'opération de dérivation (une fois, deux fois) sont essentielles. En effet,

$$\begin{aligned} & ay_1''(t) + by_1'(t) + cy_1(t) = d(t) \\ \text{et} \\ & ay_2''(t) + by_2'(t) + cy_2(t) = d(t) \end{aligned}$$

conduisent à

$$a\left[y_1''(t) - y_2''(t)\right] + b\left[y_1'(t) - y_2'(t)\right] + c\left[y_1(t) - y_2(t)\right] = 0 \quad [d(t)\text{a disparu !}]\,.$$

Comme $y_1''(t) - y_2''(t) = (y_1 - y_2)''(t)$ et $\left[y_1'(t) - y_2'(t)\right] = (y_1 - y_2)'(t)$, ce qui est au-dessus montre que $z := y_1 - y_2$ est une solution de $(\text{ed})_{2,0}$.
Réciproquement, soit y_p une solution de $(\text{ed})_2$ et z une solution de $(\text{ed})_{2,0}$; alors, les mêmes propriétés de linéarité invoquées plus haut assurent que $y_p + z$ est une solution de $(\text{ed})_2$.
Formulons le théorème qui en découle :

Théorème 1.4.5 Toutes les solutions de $(\text{ed})_2$ sont de la forme

$$y = y_p + z, \tag{1.51}$$

où y_p est une solution de $(\text{ed})_2$ et z une solution de $(\text{ed})_{2,0}$.
Elles sont en particulier définies sur tout l'intervalle I.

y_p est parfois appelée « une solution particulière de $(\text{ed})_2$ »... par opposition à z qui est « une solution quelconque de $(\text{ed})_{2,0}$ ».
Du point de vue structure, l'ensemble des solutions de $(\text{ed})_2$ est un plan affine de $E = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, c'est-à-dire le translaté d'un plan vectoriel. L'illustration géométrique ci-dessous est parallèle à celle présentée en Figure 6.

Si $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0' \in \mathbb{R}$, les conditions conjointes $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_0'$ pour une solution y de $(\text{ed})_2$ permettent de déterminer sans ambiguïté les deux constantes libres dans la formulation de la solution générale de $(\text{ed})_2$.
On convient d'appeler *problème de* CAUCHY celui de la résolution de $(\text{ed})_2$ avec les conditions particulières $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_0'$.

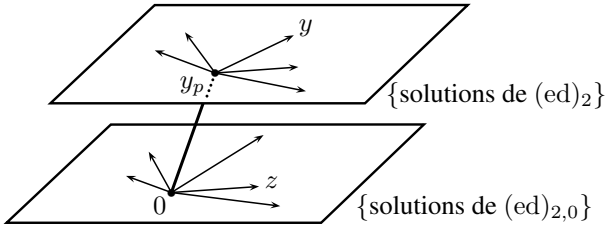


Figure 7

Théorème 1.4.6 Pour tout jeu de données $(t_0, y_0, y_0') \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, il existe une et une seule solution au problème de CAUCHY

$$(\mathscr{C}) \begin{cases} ay'' + by' + cy = d(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0'. \end{cases}$$

Démonstration : La forme générale des solutions de $(\mathrm{ed})_2$ est

$$t \in I \mapsto y(t) = y_p(t) + C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t),$$

où y_p est une solution particulière de l'équation différentielle complète $(\mathrm{ed})_2$ et (y_1, y_2) le couple de fonctions de base mises en évidence lors de la résolution de l'équation différentielle homogène $(\mathrm{ed})_{2,0}$.
Nous verrons plus loin (au chapitre 3) une argumentation générale permettant de répondre à la question posée. Donnons néanmoins ici une démonstration « à la main », avec les connaissances dont nous disposons dans ce chapitre.

• Cas où l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2.
Pour répondre aux exigences du problème de CAUCHY, nous avons à résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} C_1 e^{r_1 t_0} + C_2 e^{r_2 t_0} = y_0 - y_p(t_0) \\ C_1 r_1 e^{r_1 t_0} + C_2 r_2 e^{r_2 t_0} = y_0' - y_p'(t_0). \end{cases} \tag{1.52}$$

La matrice de ce système linéaire est

$$\begin{bmatrix} e^{r_1 t_0} & e^{r_2 t_0} \\ r_1 e^{r_1 t_0} & r_2 e^{r_2 t_0} \end{bmatrix},$$

dont le déterminant est $e^{(r_1+r_2)t_0}(r_2 - r_1) \neq 0$. Nous sommes donc assurés que (1.52) a une et une seule solution (C_1, C_2).

• Cas où l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle a une seule solution réelle r.
Dans ce cas, le système linéaire de deux équations à deux inconnues (C_1 et C_2) à considérer est :

$$\begin{cases} C_1 e^{rt_0} + C_2 t_0 e^{rt_0} = y_0 - y_p(t_0) \\ C_1 r e^{rt_0} + (1 + rt_0) e^{rt_0} = y_0' - y_p'(t_0). \end{cases} \tag{1.53}$$

La matrice de ce système linéaire est

$$\begin{bmatrix} e^{rt_0} & t_0 e^{rt_0} \\ re^{rt_0} & (1 + rt_0) e^{rt_0} \end{bmatrix},$$

dont le déterminant est $e^{2rt_0} \neq 0$. Nous sommes donc assurés que (1.53) a une et une seule solution (C_1, C_2).

• Cas où l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$.
Les exigences $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_0'$ se traduisent alors par

$$\begin{cases} C_1 e^{\alpha t_0} \cos(\beta t_0) + C_2 e^{\alpha t_0} \sin(\beta t_0) = y_0 - y_p(t_0), \\ C_1 e^{\alpha t_0} \left[\alpha \cos(\beta t_0) - \beta \sin(\beta t_0)\right] + C_2 e^{\alpha t_0} \left[\alpha \sin(\beta t_0) + \beta \cos(\beta t_0)\right] = y_0' - y_p'(t_0). \end{cases} \tag{1.54}$$

La matrice de ce système linéaire est

$$e^{\alpha t_0} \begin{bmatrix} \cos(\beta t_0) & \sin(\beta t_0) \\ \\ \alpha \cos(\beta t_0) - \beta \sin(\beta t_0) & \alpha \sin(\beta t_0) + \beta \cos(\beta t_0) \end{bmatrix}$$

dont le déterminant est $e^{2\alpha t_0} \beta \neq 0$. A nouveau ici, nous sommes sûrs que (1.54) a une seule et unique solution (C_1, C_2). □

En Physique ou en Mécanique, on appelle parfois « $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_0'$ » les *conditions initiales*. En effet, étant donné la *position* y_0 et la *vitesse* y_0' à la date t_0, on est intéressé par ce qui se passe après, quand $t > t_0$. Ce que dit le Théorème 1.4.6 est que les conditions initiales déterminent complètement la solution y de l'équation différentielle $(\text{ed})_2$.

Deux graphes de solutions de $(\text{ed})_2$ peuvent se croiser comme à gauche dans la Figure 8 (la position à la date t_0 est la même, mais les vitesses à cette date sont différentes). La situation illustrée graphiquement à droite dans la Figure 8 ne peut se produire : on ne peut avoir deux solutions différentes de $(\text{ed})_2$ passant à une date t_0 au même point et à la même vitesse.
Mise en garde au lecteur-étudiant : Ce n'est pas parce qu'il y a *deux* conditions imposées à la solution y de $(\text{ed})_2$ qu'on détermine les *deux* constantes C_1 et C_2... Par exemple

$$(\mathscr{P}) \begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta \end{cases}$$

n'est pas un problème de Cauchy. Rien ne nous dit d'ailleurs s'il y a des solutions à $(\mathscr{P})$ ou s'il y en a plusieurs.
Les conditions dans un problème de Cauchy portent sur y et sa dérivée y' *au même point.*

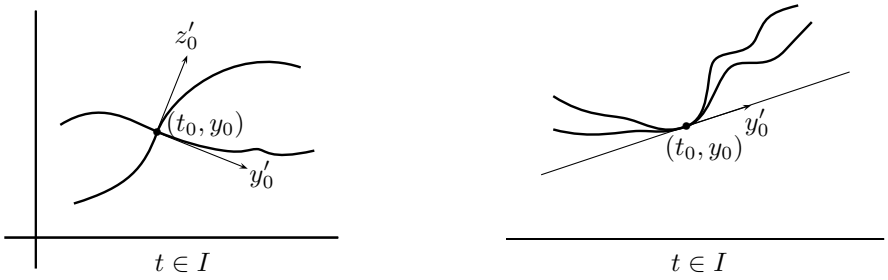


Figure 8

1.4.3 Techniques de recherche de solutions particulières de $(\mathrm{ed})_2$ lorsque les seconds membres sont des fonctions polynomiales, exponentielles ou trigonométriques

Nous avons vu qu'un passage incontournable dans la résolution de $(\mathrm{ed})_2$ était la recherche d'*une* solution (dite particulière). Ce que nous présentons ici est un ensemble de techniques pour y arriver, lorsque les fonctions d apparaissant dans le second membre de $(\mathrm{ed})_2$ sont de la famille des fonctions usuelles étudiées depuis le lycée : fonctions polynomiales, exponentielles ou trigonométriques (et sommes et produits d'entre eux).

1.4.3.1 Le second membre d est une fonction polynomiale

Par cohérence avec les usages, notons P ce second membre,

$$P(t) = \delta_0 + \delta_1 t + \cdots + \delta_n t^n,$$

avec $\delta_n \neq 0$, de sorte que P est une fonction polynomiale de degré n.
On va chercher une solution particulière y_p à

$$ay'' + by' + cy = P(t) \tag{1.55}$$

qui soit aussi polynomiale ; on va la désigner par Q. Supposons donc que Q soit polynomiale de degré m. Que se passe t-il quand on dérive Q ? La dérivée Q' est polynomiale de degré $m-1$, la dérivée Q'' est polynomiale de degré $m-2$. Donc, quel est le degré de la fonction polynomiale $aP'' + bP' + cP$? Réponse : ça dépend de b et de c (rappelons que $a \neq 0$). On comprendra donc la technique proposée pour « ajuster »

$$aQ'' + bQ' + cQ = P(t). \tag{1.56}$$

- Si $c \neq 0$, on cherche une solution particulière polynomiale de même degré que P, à savoir n.
- Si $c = 0$ et $b \neq 0$, on voit qu'on a « tombé le degré » (comme on dit en Midi-Pyrénées) dans $aQ'' + bQ' + cQ = aQ'' + bQ'$. Donc, pour résoudre (1.56), on cherche une solution particulière polynomiale de degré $n+1$ (on « monte le degré » d'un cran).

- Si $c = 0$ et $b = 0$, on voit que $aQ'' + bQ' + cQ = aQ''$ n'est plus que de degré $n - 2$ et donc, si on veut résoudre (1.56), on cherche une solution particulière Q qui soit de degré $n + 2$.

Le vocable « on cherche » ne signifie pas ici (comme dans les sous-cas suivants d'ailleurs) que l'on peut aboutir à un échec... Le système linéaire permettant de déterminer les coefficients de Q a effectivement des solutions ; obtenir les coefficients de Q par un jeu d'identifications est possible... Il y a donc une *garantie* d'aboutir par la méthode préconisée. Il faut donc garder à l'esprit : *« on cherche (et on est sûr de trouver !) ».*

Mais il faut être ici, comme ailleurs, efficace et économe en calculs ! Ainsi, si par exemple on cherche une solution particulière polynomiale Q à

$$2y'' + 7y' = t^2,$$

on considère Q polynomiale de degré 3 comme cela est préconisé. Inutile de traîner un terme constant δ_0 dans $Q(t) = \delta_0 + \delta_1 t + \delta_2 t^2 + \delta_3 t^3$ car il disparaîtra par dérivation. Remarque du même type si $c = 0$ et $b = 0$.

1.4.3.2 Le second membre d est le produit d'une fonction exponentielle par une fonction polynomiale

On va chercher une solution particulière y_p à

$$ay'' + by' + cy = e^{\alpha t} P(t), \tag{1.57}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ et P est une fonction polynomiale de degré n. On va chercher une solution particulière du même type que le second membre,

$$t \in \mathbb{R} \mapsto y_p(t) = e^{\alpha t} Q(t),$$

avec Q polynomiale de degré m. Que se passe t-il quand on dérive la fonction candidate y_p ? On a :

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= e^{\alpha t} Q'(t) + \alpha e^{\alpha t} Q(t), \\ y_p''(t) &= e^{\alpha t} Q''(t) + 2\alpha e^{\alpha t} Q'(t) + \alpha^2 e^{\alpha t} Q(t). \end{aligned}$$

Noter que $e^{\alpha t}$ traîne toujours par là... on ne peut pas s'en débarasser. En conséquence, chercher à résoudre (1.57) conduit à

$$\cancel{e^{\alpha t}} \left[\left(a\alpha^2 + b\alpha + c \right) Q(t) + (2\alpha + b) Q'(t) + aQ''(t) \right] = \cancel{e^{\alpha t}} P(t). \tag{1.58}$$

Au vu de ce qui a été dit au sous-cas précédent, on comprendra la technique proposée pour « ajuster » (1.58) :

- Si α n'est pas solution de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle, c'est-à-dire si $a\alpha^2 + b\alpha + c \neq 0$, on cherche (et on trouvera !) une solution particulière à (1.57) de la forme $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{\alpha t} Q(t)$, où Q est polynomiale de même degré que P.

- Si α est racine (seulement) simple de l'équation caractéristique, c'est-à-dire si $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ mais $2a\alpha + b \neq 0$, on cherche une solution particulière à (1.57) de la forme $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{\alpha t} tQ(t)$, où Q est polynomiale de même degré n que P (mais $tQ(t)$ polynomiale de degré $n+1$!).
- Si α est racine double de l'équation caractéristique, c'est-à-dire si $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ et $2a\alpha + b = 0$, alors on cherche une solution particulière à (1.57)de la forme $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{\alpha t} t^2 Q(t)$, où Q est polynomiale de même degré n que P (mais $t^2 Q(t)$ polynomiale de degré $n+2$).

1.4.3.3 Le second membre d est le produit de $\cos(\beta t)$ (ou $\sin(\beta t)$) par une fonction polynomiale

On cherche une solution particulière y_p à

$$ay'' + by' + cy = P(t)\cos(\beta t) \quad \text{ou bien} \quad P(t)\sin(\beta t), \tag{1.59}$$

où P est une fonction polynomiale de degré n et $\beta \neq 0$.
Ce qui va suivre va beaucoup ressembler à ce qui a été proposé au sous-paragraphe précédent. La raison en est que $\cos(\beta t)$ et $\sin(\beta t)$ sont les deux enfants de $e^{i\beta t}$ via la formule (que le lecteur-étudiant connaît peut-être) :

$$e^{i\beta t} = \cos(\beta t) + i\sin(\beta t), \tag{1.60}$$

où i est un nombre complexe (très particulier) vérifiant $i^2 = -1$.
On va chercher une solution particulière du même type que le second membre,

$$t \in \mathbb{R} \mapsto y_p(t) = Q_1(t)\cos(\beta t) + Q_2(t)\sin(\beta t),$$

avec Q_1 et Q_2 polynomiales de degré m. Que se passe t-il quand on dérive la fonction candidate y_p ? On a :

$$\begin{aligned}
y_p'(t) &= Q_1'(t)\cos(\beta t) - \beta Q_1(t)\sin(\beta t) + Q_2'(t)\sin(\beta t) + \beta Q_2(t)\cos(\beta t),\\
y_p''(t) &= Q_1''(t)\cos(\beta t) - 2\beta Q_1'(t)\sin(\beta t) - \beta^2 Q_1(t)\cos(\beta t)\\
&\quad + Q_2''(t)\sin(\beta t) + 2\beta Q_2'(t)\cos(\beta t) - \beta^2 Q_2(t)\sin(\beta t).
\end{aligned}$$

Par suite, chercher à résoudre (1.59) conduit à

$$\left.\begin{aligned}
&aQ_1''(t)\cos(\beta t) + aQ_2''(t)\sin(\beta t)\\
&+ Q_1'(t)\left[-2a\beta\sin(\beta t) + b\cos(\beta t)\right] + Q_2'(t)\left[2a\beta\cos(\beta t) + b\sin(\beta t)\right]\\
&+ Q_1(t)\left[-a\beta^2\cos(\beta t) - b\beta\sin(\beta t) + c\cos(\beta t)\right]\\
&+ Q_2(t)\left[-a\beta^2\sin(\beta t) + b\beta\cos(\beta t) + c\sin(\beta t)\right]\\
&= P(t)\cos(\beta t) \quad (\text{ou bien } P(t)\sin(\beta t)).
\end{aligned}\right\} \tag{1.61}$$

Si on veut « ajuster » (1.61), P étant de degré n donné, on voit que ce qui peut faire tomber le degré à gauche de (1.61) est d'avoir

$$-a\beta^2\cos(\beta t) - b\beta\sin(\beta t) + c\cos(\beta t) = 0$$

et

$$-a\beta^2\sin(\beta t) + b\beta\cos(\beta t) + c\sin(\beta t) = 0.$$

Quand cela se produit-il ? Réponse : Exactement lorsque

$$-a\beta^2 + c = 0 \quad \text{et} \quad b = 0. \tag{1.62}$$

Or, ceci exprime que

$$\big(-a\beta^2 + c\big) + ib\beta = 0,$$

C'est-à-dire : $i\beta$ est racine du trinôme caractéristique $ar^2 + br + c$.
C'est là qu'a lieu précisément la ligne de partage des eaux... Il n'y a pas de cas supplémentaire comme au § 1.4.3.2 car on ne peut avoir simultanément

$$2\,a\,\beta = 0 \text{ et } b = 0,$$

c'est-à-dire $b + i\,(2a\beta)) = 0$, soit encore : $i\beta$ est racine double du trinôme caractéristique $ar^2 + br + c$ (n'oublions pas que $\beta \neq 0$).
On est à même à présent de comprendre la technique proposée pour « ajuster » (1.61) :

- Si $i\beta$ (*et non β !*) n'est pas solution de (ec), on cherche (et on trouvera !) une solution particulière à (1.59) de la forme $t \longmapsto Q_1(t)\cos(\beta t) + Q_2(t)\sin(\beta t)$, où Q_1 et Q_2 sont polynomiales de même degré que P.
- Si $i\beta$ est solution de (ec) (en d'autres termes : $b = 0$ et $-a\beta^2 + c = 0$), alors on cherche (et on trouvera !) une solution particulière à (1.59) de la forme $t \longmapsto tQ_1(t)\cos(\beta t) + tQ_2(t)\sin(\beta t)$, où Q_1 et Q_2 sont polynomiales de même degré que P (mais $tQ_1(t)$ et $tQ_2(t)$ polynomiales de degré $n + 1$).

Exemple 1.4.7 Cherchons une solution particulière de

$$y'' - 2y' + y = \sin t. \tag{1.63}$$

Le second membre de (1.63) est bien de la forme $P(t)\sin(\beta t)$, avec $\beta = 1$ et $P =$ fonction polynomiale égale à 1, de degré 0 donc. On note que $\beta = 1$ est racine du trinôme caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0$, mais on s'en fiche... c'est $i\beta = i$ qui importe. Comme i n'est pas racine du trinôme caractéristique, on cherche une solution particulière à (1.63) de la forme $t \in \mathbb{R} \longmapsto y_p(t) = B\sin t$, où $B \in \mathbb{R}$. Ayant calculé $y_p'(t)$ et $y_p''(t)$, on « injecte » dans (1.63) et on arrive à

$$-2B\cos t = \sin t. \tag{1.64}$$

Patatras ! (1.64) est impossible à résoudre... Que s'est-il passé ? C'est qu'on est tombé dans le piège tendu, celui dans lequel tombent la plupart des étudiants, au moins la première fois... On n'a jamais dit de chercher (et de trouver !) une solution particulière à (1.63) de la forme $t \longmapsto B\sin t$, mais bien de la forme $t \longmapsto A\cos t + B\sin t$, avec A et B réels.
De fait, avec une telle fonction candidate, on arrive à $A = \dfrac{1}{2}$ et $B = 0$; la fonction $y_p : t \in \mathbb{R} \longmapsto y_p(t) = \dfrac{1}{2}\cos t$ est bien une solution particulière de l'équation différentielle (1.63).

Cela nous conduit à la mise en garde suivante :

Ce n'est pas parce que dans le second membre de $(\text{ed})_2$ il n'y a que des sinus qu'il faut aller chercher des solutions particulières avec des sinus seuls ! *Cosinus et sinus vont toujours ensemble* (comme l'indiquent leurs noms, co-sinus = ce qui va avec sinus).

1.4.3.4 Extension des § 1.4.3.2 et 1.4.3.3 (le feu d'artifice final !)

On suppose ici que le second membre de $(\text{ed})_2$ est de la forme $e^{\alpha t}P(t)\cos(\beta t)$ ou bien de la forme $e^{\alpha t}P(t)\sin(\beta t)$, où P est une fonction polynomiale de degré n.
Selon une technique déjà éprouvée, on se ramène en fait au cas précédent (§ 1.4.3.3) par le changement de fonctions inconnues $z(t) = e^{-\alpha t}y(t)$. Revoyez ce que cela donne, si vous l'avez oublié... Il en résulte en tout cas qu'on est conduit à chercher (et à trouver !) une solution particulière de la forme

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{\alpha t}\left[Q_1(t)\cos(\beta t) + Q_2(t)\sin(\beta t)\right],$$

Q_1 et Q_2 étant polynomiales de degré n ou $n+1$ suivent que $\alpha + i\beta$ (et donc $\alpha - i\beta$) est racine du trinôme caractéristique $ar^2 + br + c$ ou pas.

1.4.3.5 Le second membre est la somme $d_1 + d_2 + \cdots + d_k$ de fonctions plus simples

Commençons par traiter un exemple, l'idée générale sera ensuite facile à comprendre.

Exemple 1.4.8 Cherchons une solution particulière de

$$y'' + y = \cos^3 t. \tag{1.65}$$

Ici, $d(t) = \cos^3 t$ n'est pas du type de ceux considérés au § 1.4.3.3 ; on s'y ramène toutefois en « linéarisant » $\cos^3 t$:

$$\cos^3 t = \frac{1}{4}\cos(3t) + \frac{3}{4}\cos t \tag{1.66}$$

(au fait... comment y arrive t-on ?).
On commence par exhiber une solution particulière de l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{4}\cos(3t) \quad (\text{cf. § 1.4.3.3})$$

puis une solution particulière de l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{3}{4}\cos t \quad (\text{cf. § 1.4.3.3}).$$

En raison de (1.66), la somme des deux fonctions exhibées est une solution particulière de l'équation différentielle (1.65). Ainsi,

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto y_p(t) = -\frac{1}{32}\cos(3t) + \frac{3}{8}t\sin t$$

est une solution particulière de (1.65).

Soit donc $d(t) = d_1 + d_2 + \cdots + d_k$, où les $d_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont toutes des fonctions continues sur I. Supposons que l'on sache résoudre

$$ay'' + by' + cy = d_i(t), \quad t \in I \tag{1.67}$$

pour tout $i = 1, .., k$. Appelons $\hat{y_i}$ une solution de (1.67), $i = 1, .., k$. En raison de la linéarité de l'équation différentielle en jeu, il est alors clair que $\hat{y_1} + \cdots + \hat{y_k}$ est solution de $(\text{ed})_2$ (avec $d(t)$ au second membre).

Terminons ce § 1.4.3 par des recommandations générales au lecteur-étudiant.

- Inutile d'apprendre par cœur les techniques déballées dans les § 1.4.3.1 à 1.4.3.4 ; il est préférable de garder en tête *les idées générales des manières de faire* (c'est-à-dire : tenter des solutions particulières du même type que les membres de droite ; monter le degré des fonctions polynomiales proposées si les tentatives échouent).
- Quand $\cos(\beta t)$ ou $\sin(\beta t)$ intervient dans le second membre, *c'est* $i\beta$ *et non* β qui sert (solution ou pas de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle).
- Enfin, quelques calculs simples et rapides suffisent à *vérifier* que la fonction y_p à laquelle on aboutit est bien une solution de l'équation différentielle $(\text{ed})_2$.

Annexe 1

Tout dans ce chapitre a concerné le monde *réel* : les coefficients dans les équations différentielles étaient des nombres réels, les fonctions de membre de droite étaient à valeurs réelles, les solutions cherchées étaient des fonctions à valeurs réelles. Il n'y a pas de difficulté majeure à considérer des coefficients complexes, des fonctions de membre de droite à valeurs complexes, des solutions qui seraient des fonctions à valeurs complexes. Nous avons privilégié l'approche auto-suffisante du monde réel, car *« c'est assez complexe comme ça »* (dixit un étudiant).
Le § 1.3 peut être repris totalement en ayant chaussé des lunettes complexes. Il suffit de savoir :

— Ce qu'est une fonction à valeurs complexes $y : t \in I \longmapsto y(t) \in \mathbb{C}$, $y(t) = \operatorname{Re} y(t) + i \operatorname{Im} y(t)$, c'est-à-dire, sous forme cachée, deux fonctions à valeurs réelles

$$\operatorname{Re} y,\ \operatorname{Im} y : t \in I \longmapsto \operatorname{Re} y(t) \in \mathbb{R},\ \operatorname{Im} y(t) \in \mathbb{R}.$$

— La dérivée en t de $y : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est

$$\begin{aligned} y'(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{y(t+h) - y(h)}{h} \quad \text{(limite dans } \mathbb{C}) \\ &= (\operatorname{Re} y)'(t) + i\,(\operatorname{Im} y)'(t). \end{aligned}$$

— Pour $z_0 \in \mathbb{C}$, la (fonction) dérivée de $t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{z_0 t}$ est $t \in \mathbb{R} \longmapsto z_0 e^{z_0 t}$. Avec ces connaissances, tout le § 1.4.3 se réécrit *mutatis mutandis*.

Le cas des équations différentielles du second ordre à coefficients constants complexes (extension du § 1.4) mérite un commentaire.
Considérons donc à nouveau l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = d(t), \quad t \in I \tag{ed}_2$$

où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, a, b, et c sont des constantes complexes (avec $a \neq 0$), et $d : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue sur $\mathbb{C}$. Résumons les résultats :

- Si l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ a deux solutions r_1 et r_2 (complexes en général), toutes les solutions de

  $$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \tag{ed}_{2,0}$$

  sont les fonctions complexes de la forme

  $$t \in \mathbb{R} \longmapsto D_1 e^{r_1 t} + D_2 e^{r_2 t}, \tag{1.68}$$

  où D_1 et D_2 sont des complexes arbitraires.
- Si l'équation caractéristique a une solution double r, toutes les solutions de $(\text{ed})_{2,0}$ sont fournies par

  $$t \in \mathbb{R} \longmapsto (D_1 + D_2 t)\, e^{rt},$$

  où D_1 et D_2 sont des complexes quelconques.

Voyons si on va retrouver par le biais de (1.68) les résultats du § 1.4.1.3.
Considérant a, b et c réels dans $(\text{ed})_{2,0}$, tels que $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, de sorte que les solutions de l'équation caractéristique sont $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$, les solutions (complexes) de $(\text{ed})_{2,0}$ sont les fonctions

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto D_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + D_2 e^{(\alpha-i\beta)t}, \tag{1.69}$$

où D_1 et D_2 sont des complexes arbitraires.
Or, qu'est-ce qu'une solution réelle de $(\text{ed})_{2,0}$? Réponse : c'est une solution complexe y de $(\text{ed})_{2,0}$ telle que $\overline{y} = y$. Analysons ce que cela signifie : $\overline{y} = y$ veut aussi dire $y = \dfrac{\overline{y} + y}{2}$, ce qui, après quelques calculs simples, signifie

$$\begin{aligned} y(t) &= \operatorname{Re}(D_1 + D_2)\, e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \operatorname{Im}(D_1 + D_2)\, e^{\alpha t} \sin(\beta t)\,. \\ &= C_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + C_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t)\,. \end{aligned} \tag{1.70}$$

En balayant $\mathbb{C}$ avec D_1 et D_2, on balaie tout $\mathbb{R}$ avec $C_1 = \operatorname{Re}(D_1 + D_2)$ et $C_2 = \operatorname{Im}(D_1 + D_2)$. On retrouve ainsi les résultats du Théorème 1.4.4. Comme quoi,

« *Tout est dans tout et réciproquement* » P. Dac.

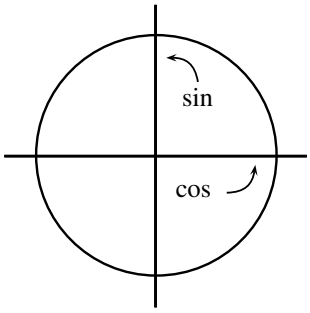
Retenons de ce dernier point de l'Annexe 1 que les *deux solutions complexes* $t \longmapsto e^{(\alpha+i\beta)t}$, $e^{(\alpha-i\beta)t}$ de l'équation différentielle ont donné naissance (en prenant la partie réelle et la partie imaginaire) aux *deux solutions réelles* $t \longmapsto e^{\alpha t}\cos(\beta t)$, $e^{\alpha t}\sin(\beta t)$. Nous aurons l'occasion de revenir à cette duplication solutions complexes-solutions réelles au chapitre 4.

Annexe 2 – Boîte à outils

• Les fonctions trigonométriques sinus et cosinus, les polynômes (ou fonctions polynomiales), les fonctions exponentielles $t \longmapsto e^{rt}$.

• Les règles de dérivation des fonctions trigonométriques

$$\sin' = \cos, \quad \cos' = -\sin$$



Pour s'en souvenir, pensez que sur le cercle trigonométrique, « dériver est juste un coup de manivelle à droite $\left(+\frac{\pi}{2}\right)$ » : sinus donne cosinus, cosinus donne - sinus, - sinus donne cos, etc. Plus généralement : la fonction $t \longmapsto \sin(\beta t)$ a pour dérivée $\beta \cos(\beta t)$; la fonction $t \longmapsto \cos(\beta t)$ a pour dérivée $-\beta \sin(\beta t)$.

• La règle de dérivation de la fonction exponentielle.
La dérivée de la fonction $t \longmapsto e^{\alpha t}$ est $\alpha e^{\alpha t}$.

• Les fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique

$$\mathrm{sh}\, t \text{ ou } \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad \mathrm{ch}\, t \text{ ou } \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

Règles de dérivation : sh'=ch, ch'=sh (pas de changement de signe ici !). Plus généralement, la fonction $t \longmapsto \sinh(\beta t)$ a pour dérivée $\beta \cosh(\beta t)$, la fonction $t \longmapsto \cosh(\beta t)$ a pour dérivée $\beta \sinh(\beta t)$.

• La règle de dérivation du produit de deux fonctions dérivables u et v :

$$(uv)' = uv' + vu'.$$

• Toute fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue* sur l'*intervalle* I admet une primitive (on dit parfois antidérivée) F sur I, c'est-à-dire une fonction F telle que

$$F'(t) = f(t) \quad \text{pour tout } t \in I.$$

Une notation (ambiguë) pour désigner F est $\int f\mathrm{d}t$.
Deux fonctions primitives de f sur I diffèrent d'une constante.

• Résolution d'un système linéaire $(2,2)$
Le système linéaire en les inconnues x et y

$$\left\{ \begin{array}{l} ax+by=\alpha \\ cx+dy=\beta \end{array} \right. ,$$

c'est-à-dire

$$\left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right] \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array} \right)$$

en notation maticielle, a une et une seule solution dès lors que $ad-bc \neq 0$ ($ad-bc$ est le déterminant de $\left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right]$, parfois noté $\left| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right|$).
Une forme explicite de la solution du système linéaire est alors :

$$x = \frac{\left| \begin{array}{cc} \alpha & b \\ \beta & d \end{array} \right|}{ad-bc} \ , \quad y = \frac{\left| \begin{array}{cc} a & \alpha \\ c & \beta \end{array} \right|}{ad-bc} \ .$$

• Résolution des équations du second degré
Les solutions de l'équation

$$ax^2+bx+c=0 \quad (\text{avec } a \neq 0)\,,$$

ou bien les racines du trinôme ax^2+bx+c, sont comme suit :

— Si $\Delta = b^2-4ac > 0$,

$$r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{[deux racines réelles distinctes]}$$

— Si $\Delta = 0$,

$$r = \frac{-b}{2a} \quad \text{[une racine réelle double ; elle compte donc deux fois]}$$

— Si $\Delta < 0$,

$$r_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } r_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$
[deux racines complexes conjuguées]

Dans tous les cas, $r_1+r_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $r_1\,r_2 = \dfrac{c}{a}$.

Chapitre 2

Équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre à coefficients fonctions continues

Ce court chapitre a pour but d'étudier les équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre à coefficients fonctions continues

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t), \quad t \in I$$

[c'est-à-dire, a et b sont des fonctions continues sur I], généralisant en cela ce qui a été vu au § 1.3 du chapitre 1 dans lequel a et b étaient supposés constants.

Les techniques et résultats utilisés sont essentiellement les mêmes que ceux du chapitre 1. Nous nous permettons d'en ajouter quelques unes :

$$\begin{cases} \text{- La dérivation de la fonction } t \mapsto e^{u(t)} \\ \text{- La dérivation de la puissance d'une fonction} \\ \text{- (Important) La règle de primitivation de } \dfrac{u'}{u} \\ \text{- Les primitives des fonctions usuelles.} \end{cases}$$

Cela est rappelé en Annexe 1 « Boîte à outils » en fin de chapitre.

Sommaire

2.1 Cas d'une équation différentielle $(\mathrm{ed})_1$ **avec second membre nul** ($\gamma \equiv 0$) **51**
2.2 Cas d'une équation différentielle $(\mathrm{ed})_1$ **complète (c'est-à-dire, avec un second membre** $\gamma \not\equiv 0$**)** **55**
2.3 Le problème (dit) de Cauchy **58**
2.4 Retour à l'équa diff générale **59**
2.5 Un coup d'œil du côté du monde non linéaire **61**
Annexe 1 – Boîte à outils **63**

Soit I un *intervalle ouvert* de $\mathbb{R}$, a, b et c des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ supposées *continues* sur I. L'équation différentielle étudiée dans ce chapitre est

$$\boxed{a(t)y' + b(t)y = c(t), \quad t \in I} \tag{2.1}$$

Ceci est une notation abrégée pour dire que l'on cherche une fonction dérivable $y : I \to \mathbb{R}$ telle que

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \quad \text{pour tout } t \in I.$$

Le cas où a, b et c sont à valeurs complexes et qu'on cherche des fonctions y à valeurs complexes ne pose pas plus de difficultés. Nous ne le considérons pas toutefois ici, car l'expérience nous a montré que cette approche peut être génératrice de confusions et de mélanges chez le lecteur-étudiant. ⋆

Si a ne s'annule pas sur I, c'est que

$$a(t) > 0 \quad \text{pour tout } t \in I,$$

ou bien

$$a(t) < 0 \quad \text{pour tout } t \in I.$$

En effet, le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue $a : I \to \mathbb{R}$ nous dit que si $a(t_1) > 0$ et $a(t_2) < 0$, où $t_1 < t_2$, alors il existe $t \in]t_1, t_2[$ tel que $a(t) = 0$. Donc, si a ne s'annule pas sur I, (2.1) équivaut à :

$$y' + \frac{b(t)}{a(t)}y = \frac{c(t)}{a(t)}, \quad t \in I. \tag{2.1}'$$

Pour alléger l'écriture, nous adoptons les notations suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{l} y' + \beta(t)y = \gamma(t), \quad t \in I \\ \beta \text{ et } \gamma : I \to \mathbb{R} \quad \textit{continues} \text{ sur } I \end{array}} \tag{ed}_1$$

Ce sera notre équation différentielle modèle.
$(\text{ed})_1$ étant une équation différentielle *linéaire*, il est normal, comme au § 1.3.1 du chapitre 1, de commencer par traiter le cas où le second membre γ est la fonction identiquement nulle.

2.1 Cas d'une équation différentielle $(\text{ed})_1$ avec second membre nul ($\gamma \equiv 0$)

$$\boxed{\begin{array}{l} y' + \beta(t)y = 0, \quad t \in I \\ \beta : I \to \mathbb{R} \quad \text{continue sur } I. \end{array}} \tag{ed}_{1,0}$$

Rappelons qu'une primitive (ou antidérivée) de β sur I est une fonction $B : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I telle que

$$B'(t) = \beta(t) \quad \text{pour tout } t \in I.$$

β étant supposée continue sur I, il *existe* une primitive de β sur I ; de plus, puisque I est un *intervalle* de $\mathbb{R}$, toutes les primitives de β sur I sont de la forme $B+r$, où B est une primitive (que l'on qualifie de particulière) et r un réel.

Une primitive de β est parfois notée par le graphisme (ambigu) $\int \beta(t)\mathrm{d}t$.

Théorème 2.1.1 Soit B *une* primitive de β sur I. Alors, *toutes* les solutions de $(\mathrm{ed})_{1,0}$ sont de la forme

$$y \ : \ t \in I \mapsto y(t) = Ce^{-B(t)}, \tag{2.2}$$

où C est une constante réelle.

Démonstration : Opérons le changement de fonctions suivant :

$$z(t) = e^{B(t)}y(t), \quad \text{soit encore } y(t) = e^{-B(t)}z(t). \tag{2.3}$$

On a :

$$y'(t) = -\beta(t)e^{-B(t)}z(t) + e^{-B(t)}z'(t) \quad \text{pour tout } t \in I.$$

Ecrire que $y' + \beta(t)y = 0$ *équivaut* ainsi à

$$e^{-B(t)}z'(t) = 0, \quad \text{soit encore } z'(t) = 0 \quad [\text{car } e^u > 0 \text{ pour tout } u.]$$

L'équation différentielle $z' = 0$ ayant pour solutions les fonctions constantes C, les formules de changement de (2.3) nous permettent de déduire que les solutions y de $(\mathrm{ed})_{1,0}$ sont bien de la forme annoncée. □

Remarques

- Si on avait pris une autre primitive $B+r$ de β sur I, on n'aurait évidemment pas changé l'ensemble des solutions de $(\mathrm{ed})_{1,0}$; le coefficient e^{-r} de $e^{-(B(t)+r)}$ serait « rentré » dans la constante libre C.
- Dans les solutions de $(\mathrm{ed})_{1,0}$, il y a :
  - La solution $y \equiv 0$, correspondant à $C = 0$ dans (2.2) ; on savait, bien sûr, que cette fonction serait solution de $(\mathrm{ed})_{1,0}$.
  - Les solutions qui ne s'annulent jamais sur I [strictement positives sur I ou bien strictement négatives sur I], correspondant à $C \neq 0$ dans (2.2).

L'ensemble des solutions de $(\mathrm{ed})_{1,0}$ est une droite vectorielle de $E = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour déterminer cet ensemble, il suffit donc d'en déterminer *une* y_1 qui soit strictement positive sur I ou bien strictement négative sur I.

Technique pratique de calcul

On détermine *une* solution y de $(\mathrm{ed})_{1,0}$ *strictement positive* sur I (par exemple) ; on sait qu'ensuite *toutes* les solutions de $(\mathrm{ed})_{1,0}$ sont de la forme Cy, avec $C \in \mathbb{R}$.

La mise en pratique du Théorème 2.1.1 se fait de la manière suivante. Partant de $(\mathrm{ed})_{1,0}$, on a

$$\frac{y'}{y} = -\beta(t), \quad t \in I \quad [\text{ n'oublions pas } y > 0 \text{ sur } I \text{ par choix de départ}] \ ,$$

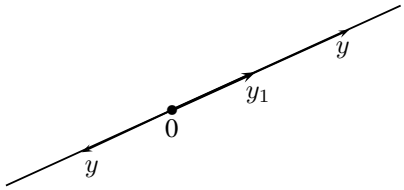


Figure 1

d'où

$$(\ln y)'(t) = -\beta(t), \quad t \in I \text{ [encore une fois, } y > 0 \text{ sur } I] \ .$$

Ainsi

$$(\ln y)(t) = -B(t),$$
[Une seule primitive suffit, nous sommes à la recherche d'*une* solution !],

ce qui donne

$$y(t) = e^{-B(t)}.$$

Donc, d'après le Théorème 2.1.1, on a toutes les solutions de $(\text{ed})_{1,0}$ par la seule expression

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto Ce^{-B(t)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Attention (et très important !). On n'acceptera pas ici de « recette de cuisine » (on divise par $y(t)$ sans savoir s'il s'annule ou pas, des valeurs absolues de $y(t)$ qui apparaissent puis disparaissent, etc.)... la manière de faire exposée au-dessus est justifiée par le Théorème 2.1.1. Dans une rédaction de solution d'exercice (dont un exemple est donné plus bas), et avant de se lancer dans des calculs, on attend en préalable une justification de la méthode utilisée.
Au lecteur-étudiant : Inutile de retenir la formule (2.2)... c'est la *structure* des solutions qu'il faut garder à l'esprit.

Exemple 2.1.2 β étant une constante réelle, résoudre

$$y' + \beta y = 0. \tag{2.4}$$

Ici, implicitement, I est toute la droite réelle ($I = \mathbb{R}$). C'est la situation étudiée au § 3.1 du chapitre 1, avec $\beta = -\dfrac{b}{a}$. Une primitive de la fonction constante β sur $\mathbb{R}$ étant $B(t) = \beta t$, toutes les solutions de (2.4) sont bien de la forme

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto Ce^{-\beta t},$$

où C est une constante réelle.

Exemple 2.1.3 Résoudre l'équation différentielle

$$y' - \frac{1}{t}y = 0 \quad \text{sur } I =]0, +\infty[\text{ puis sur }]-\infty, 0[\,. \tag{2.5}$$

Attention, changer d'intervalle I, c'est comme si on changeait d'équation différentielle ! Les solutions de (2.5) sur $]0, +\infty[$ sont

$$t \in]0, +\infty[\longmapsto Ct, \quad \text{où } C \text{ est une constante réelle ;}$$

les solutions de (2.5) sur $]-\infty, 0[$ sont

$$t \in]-\infty, 0] \longmapsto Dt, \quad \text{où } D \text{ est une constante réelle}$$

(D et C n'ont rien à voir a priori).

Exemple 2.1.4 Nous détaillons ici un exemple de résolution d'équation différentielle avec la rédaction de la solution qui est attendue.
Soit à résoudre l'équation différentielle

$$(\sin t)\, y' - (\cos t)\, y = 0, \quad t \in I = \Big]0, \frac{\pi}{2}\Big[\,. \tag{2.5'}$$

Étape 1. Bien indiquer de quoi il s'agit (phase de repérage).
(2.5)' est une équation différentielle linéaire du premier ordre, à coefficients fonctions continues sur I. Puisque $\sin t > 0$ pour tout $t \in I$, (2.5)' est équivalente à

$$y'(t) - \frac{\cos t}{\sin t} y(t) = 0, \quad t \in I. \tag{2.5''}$$

Étape 2. Annoncer clairement et de manière précise le résultat qui justifie la procédure de calcul qui sera utilisée.
Les solutions de (2.5)" sont de la forme $t \in I \longmapsto C\overline{y}(t)$, où $C \in \mathbb{R}$ et $\overline{y}$ est une solution de (2.5)" strictement positive sur I.
Il nous faut donc déterminer *une* solution $\overline{y}$ de (2.5)" vérifiant $\overline{y}(t) > 0$ *pour tout* $t \in I$.

Étape 3. Phase de calcul.
Détermination de $\overline{y}$. On a, à partir de (2.5)",

$$\frac{\overline{y}'(t)}{\overline{y}(t)} = \frac{\cos t}{\sin t}, \quad \text{d'où} \quad (\ln \overline{y})'(t) = (\ln \sin)'(t), \quad t \in I.$$

On peut donc prendre $\overline{y}$ telle que

$$(\ln \overline{y})(t) = (\ln \sin)(t), \quad \text{soit} \quad \overline{y}(t) = \sin(t), \quad t \in I.$$

Étape 4. Conclusion.
Toutes les solutions de (2.5)" sont de la forme

$$t \in I \longmapsto C \sin t, \quad \text{où } C \text{ est une constante réelle.}$$

2.2 Cas d'une équation différentielle $(\mathrm{ed})_1$ complète (c'est-à-dire, avec un second membre $\gamma \not\equiv 0$)

Revenons à l'équation différentielle $(\mathrm{ed})_1$. Qui nous dit qu'il y a des solutions à $(\mathrm{ed})_1$, c'est-à-dire des fonctions y dérivables sur I telles que

$$y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t) \quad \text{pour tout } t \in I\,?$$

De plus, même si les fonctions β et γ ont été supposées continues sur l'intervalle ouvert I, pourquoi n'y aurait-il pas des fonctions $y : J \to \mathbb{R}$ comme ci-dessous

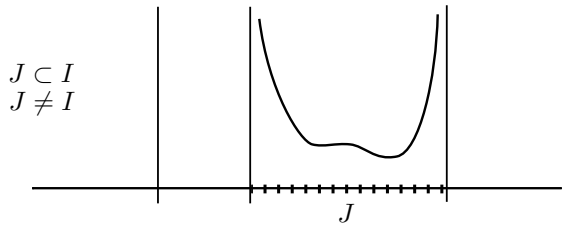


Figure 2

qui vérifieraient la relation $y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t)$ pour les t dans l'intervalle J (et qui « exploseraient » en s'approchant des bords de J) ?
Nous répondrons à ces deux interrogations en démontrant qu'il y a effectivement des solutions à $(\mathrm{ed})_1$, et que toutes ces solutions peuvent êtres définies sur I tout entier (et donc qu'il n'y a pas de solutions comme celles envisagées à la Figure 2).

2.2.1 Comment trouver *une* solution de $(\mathrm{ed})_1$?

Une première méthode consiste à observer $(\mathrm{ed})_1$, et une solution particulière peut « sauter aux yeux » immédiatement où apparaître après quelques essais ; après tout, $(\mathrm{ed})_1$ n'est qu'une équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre, et les fonctions β et γ des exemples (y compris des applications) ne sont pas si compliquées que ça...
Une seconde méthode, générale cette fois, consiste en ce qu'on appelle *« la méthode de la variation de la constante »* (drôle d'appellation... une constante ne varie pas, mais elle s'expliquera dans son utilisation). *On commence par résoudre* $(\mathrm{ed})_{1,0}$*, l'équation différentielle homogène (ou sans second membre) associée à* $(\mathrm{ed})_1$. Avec cette résolution, on dispose de la forme générale des solutions de $(\mathrm{ed})_{1,0}$:

$$y : t \in \mathbb{R} \longmapsto Ce^{-B(t)}, C \in \mathbb{R}.$$

L'idée de la méthode est de chercher une solution (dite) particulière de $(\mathrm{ed})_1$ qui soit de la forme

$$t \in I \longmapsto C(t)e^{-B(t)},$$

où C est une fonction dérivable de t (et non plus une constante, d'où le nom de la méthode). Oui mais... cela marche t-il ? N'aboutit-on pas parfois à un cul-de-sac ? Faisons l'analyse puis la synthèse du problème posé.

Analyse : Que faut-il pour que $y_p : t \in I \longmapsto y_p(t) = C(t)e^{-B(t)}$ soit solution de $(\text{ed})_1$? Observons que

$$y_p'(t) = C'(t)e^{-B(t)} - C(t)\beta(t)e^{-B(t)}, \quad t \in I.$$

Si l'on veut que y_p soit solution de $(\text{ed})_1$, il faut donc que

$$C'(t)e^{-B(t)} - \cancel{C(t)\beta(t)e^{-B(t)}} + \cancel{C(t)\beta(t)e^{-B(t)}} = \gamma(t).$$

Intéressant que tout ce qui concerne $C(t)$ disparaît... Il nous faut donc assurer

$$C'(t) = \gamma(t)e^{B(t)} \quad \text{pour tout } t \in I,$$

c'est-à-dire trouver une primitive de $t \longmapsto \gamma(t)e^{B(t)}$ sur I. Ceci est tout à fait possible puisque la fonction en question (à primitiver) est continue sur I.

Synthèse : Soit $y_p : t \in I \longmapsto y_p(t) = C(t)e^{-B(t)}$, où $C : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est *une* primitive de la fonction $t \longmapsto \gamma(t)e^{B(t)}$ sur I. Voyons si y_p est une solution de $(\text{ed})_1$.
On a

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= -C(t)\beta(t)e^{-B(t)} \quad [\text{car } B'(t) = \beta(t)] \\ &\quad + C'(t)e^{-B(t)} \\ &= -C(t)\beta(t)e^{-B(t)} + \gamma(t) \quad [\text{puisque } C'(t) = \gamma(t)e^{\beta(t)}]. \end{aligned}$$

D'où

$$y_p'(t) + \beta(t)y_p(t) = \gamma(t),$$

ce qui était souhaité.

En résumé, la méthode est viable :
- Elle nous assure *l'existence d'une solution* de $(\text{ed})_1$;
- Moyennant un calcul de primitive, elle fournit explicitement *une* solution de $(\text{ed})_1$.

Remarques :
- On est à la recherche d'*une* solution particulière de $(\text{ed})_1$, il nous suffit donc de considérer *une* primitive de la fonction $t \in I \longmapsto \gamma(t)e^{-B(t)}$; d'ailleurs une constante r qu'on ajouterait à cette primitive particulière « disparaît » dans la formulation des solutions de $(\text{ed})_1$
$$t \longmapsto [C(t) + r]\, e^{-B(t)} = C(t)e^{-B(t)} + re^{-B(t)},$$
et $t \longmapsto re^{-B(t)}$ est une solution de $(\text{ed})_{1,0}$ qu'il faudra rajouter de toutes façons (*cf.* § 2.2.2 infra).
- Le lecteur-étudiant peut (en fait, doit) oublier la fonction $t \in I \longmapsto \gamma(t)e^{-B(t)}$ à primitiver, c'est la *méthode* qu'il doit retenir.
- Dans la méthode de la variation de la constante mise en œuvre, la « constante » $C(t)$ disparaît dans les calculs (ça a été fait pour), seul $C'(t)$ subsiste à la fin. Se retrouver avec $C(t)$ et $C'(t)$ à la fin du procédé est une indication sûre qu'il y a eu une erreur de calcul.

— Le lecteur-étudiant est invité à revoir le § 1.3.2 du chapitre 1 ; la méthodologie qui y était développée devient claire à présent.

Exemple 2.2.1 (suite de l'Exemple 2.1.3) Déterminons une solution de

$$y' - \frac{1}{t}y = 1, \quad I =]0, +\infty[\,. \tag{2.6}$$

Sachant que les solutions de l'équation différentielle homogène associée sont $t \in I \longmapsto Ct$, où $C \in \mathbb{R}$, (*cf.* Exemple 2.1.3), on va chercher (et trouver !) une solution y_p de (2.6) de la forme

$$t \in I \longmapsto y_p(t) = C(t)t.$$

Dire que y_p est solution de (2.6) conduit à

$$C'(t) = \frac{1}{t}, \quad t \in I.$$

Prenons donc $C(t) = \ln(t)$ (une primitive suffit !), d'où $y_p(t) = t\ln(t)$ (ne pas oublier que c'est $y_p(t) = C(t)t$ qui est solution, pas $C(t)$!).

Exemple 2.2.2 Considérons l'équation différentielle

$$y' + (\tan t)y = 1, \quad I = \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[. \tag{2.7}$$

Les solutions générales de $y' + (\tan t)y = 0$ sur I se trouvent être de la forme

$$t \in I \longmapsto y(t) = C\cos t, \quad \text{où } C \in \mathbb{R}.$$

Rechercher une solution particulière de (2.7) par la méthode de la variation de la constante conduit à résoudre

$$C'(t) = \frac{1}{\cos(t)}, t \in I.$$

Hé hé... ça commence à être difficile. La fonction $t \in I \longmapsto \ln\left[\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$ fait l'affaire... Ainsi,

$$y_p : t \in I \longmapsto y_p(t) = \cos t \ln\left[\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

est une solution de (2.7).

2.2.2 Comment trouver *toutes* les solutions de $(\mathrm{ed})_1$?

Selon une manière de faire éprouvée au chapitre 1 (§ 1.3.2 et 1.4.2.2), la linéarité de l'équation différentielle $(\mathrm{ed})_1$ ainsi que la linéarité de l'opération de dérivation font que l'on connaît les solutions de $(\mathrm{ed})_1$ si :

— on connaît les solutions de l'équation différentielle homogène (ou sans second membre) $(\mathrm{ed})_{1,0}$ associée à $(\mathrm{ed})_1$: $y' + \beta(t)y = 0$;

— on connaît *une* solution particulière y_p de l'équation différentielle complète $(\text{ed})_1$.
En effet,

$$\{\text{solutions de } (\text{ed})_1\} = \{\text{solutions de } (\text{ed})_{1,0}\} + y_p.$$

L'ensemble des solutions de $(\text{ed})_1$ constitue une droite affine de $E = C^1(I, \mathbb{R})$ (c'est-à-dire le translaté d'une droite vectorielle).

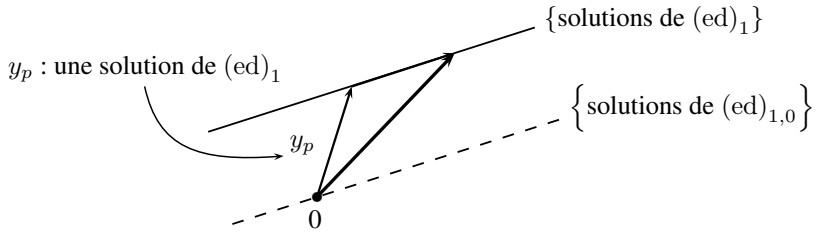


Figure 3

2.3 Le problème (dit) de CAUCHY

Généralisant ce qui a été vu au § 1.3.2 du chapitre 1, ce qu'on appelle *problème de CAUCHY* est la conjonction de l'équation différentielle $(\text{ed})_1$ et d'une condition particulière (« un passage obligé ») $y(t_0) = y_0$. Parfois, en Physique, Chimie, Biologie, t_0 est la date de démarrage ou d'observation d'un processus évoluant avec le temps t, d'où l'appellation de « condition initiale » qui est fréquemment utilisée. En bref, avec $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ *donnés* au départ, il convient de résoudre

$$(\mathscr{C}) \begin{cases} y' + \beta(t)y = \gamma(t), & t \in I \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Avec ce qui a été démontré aux § 2.1 et 2.2, nous sommes à même d'énoncer le résultat général suivant.

Théorème 2.3.1 Pour tout jeu de données $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, *il existe une et une seule* solution au problème de CAUCHY $(\mathscr{C})$, c'est-à-dire une solution y de $(\text{ed})_1$ vérifiant $y(t_0) = y_0$.

Techniquement, il s'agit juste « d'ajuster » la constante C (de la forme générale des solutions de $(\text{ed})_1$) de manière à avoir $y(t_0) = y_0$. Mais attention ! Ce n'est pas un tour de passe-passe, il y a un théorème derrière, qui dit qu'*on peut* le faire, *d'une seule façon* en plus...

Interprétation géométrique du Théorème 2.3.1 :
Par tout point $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, il passe une et une seule solution de $(\text{ed})_1$ (on dit aussi « courbe intégrale ») ; on assiste ainsi à une « stratification » (c'est-à-dire une partition) de $I \times \mathbb{R}$.

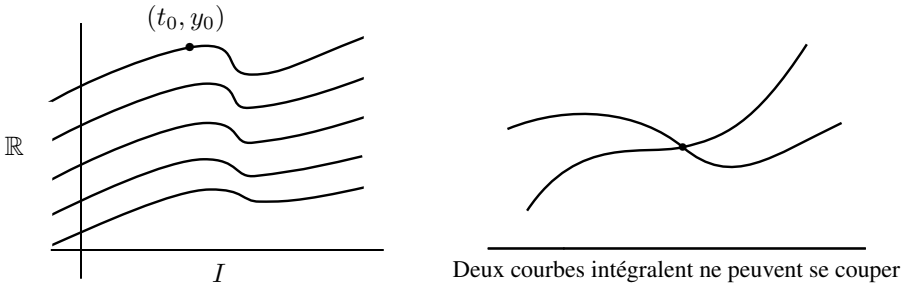


Figure 4

2.4 Retour à l'équation différentielle générale $a(t)y' + b(t)y = c(t)$

On souhaite trouver, si possible, une fonction dérivable $y : I \longmapsto \mathbb{R}$ telle que

$$\boxed{a(t)y' + b(t)y = c(t), \quad t \in I.} \tag{2.1}$$

Rien de ce qui a été présenté jusqu'à présent ne nous garantit qu'une telle fonction existe... Les ennuis viennent des $\hat{t} \in I$ qui annulent a, car dans ce cas $a(\hat{t})y'(\hat{t}) = 0$ et la contribution de $y'(\hat{t})$ disparaît dans l'équation différentielle (2.1). Alors, comment procède t-on ?

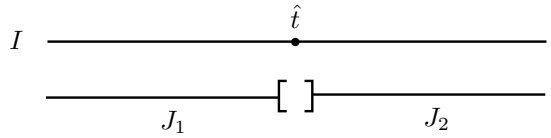
— On commence par ce qu'on sait faire ; on résout

$$y' + \frac{b(t)}{a(t)}y = \frac{c(t)}{a(t)}, \tag{2.1'}$$

sur des intervalles ouverts $J \subset I$ où la fonction a ne s'annule pas (les fonctions b et c étant continues, rappelons-le).

— On étudie dans chaque cas comment se prolongent et se raccordent en un zéro de la fonction a (c'est-à-dire un point $\hat{t}$ où $a(\hat{t}) = 0$) les solutions partielles obtenues (c'est-à-dire sur $J \subset I$).

Prenons un exemple de telle situation : $I = \mathbb{R}$ et a s'annule en un seul point $\hat{t}$



Une solution y de (2.1) (if any !)

— est solution de (2.1)' sur $J_1 =]-\infty, \hat{t}[$ (donc figure dans la classe des solutions de (2.1)' sur cet intervalle) ;
— est solution de (2.1)' sur $J_2 =]\hat{t}, +\infty[$ (donc fait partie des solutions de (2.1)' sur cet intervalle) ;
— est dérivable en $\hat{t}$, avec

$$a(\hat{t})y'(\hat{t}) + b(\hat{t})y(\hat{t}) = b(\hat{t})y(\hat{t}) = c(\hat{t}).$$

Attention ! Cette dernière exigence suppose non seulement y continue en $\hat{t}$ (le raccordement a pu être opéré) mais encore y dérivable en $\hat{t}$ (le raccordement a pu être fait de manière « lisse »). Alors, en pratique, que se passe t-il en un point $\hat{t}$ où $a(\hat{t}) = 0$?
Réponse : Tout ce qu'on peut imaginer... ou presque ; par exemple :
— On « ajuste » les constantes baladeuses apparaissant dans les solutions générales obtenues sur des intervalles J de part et d'autre de $\hat{t}$ [on y arrive assez souvent].
— Il n'y a pas moyen d'opérer les ajustements indiqués ci-dessus, auquel cas (2.1) se retrouve sans solution sur I [ça arrive aussi]
— Les raccordements en un zéro $\hat{t}$ de a se font automatiquement et sans conditions particulières sur les constantes obtenues dans les solutions générales sur des intervalles J de part et d'autre de $\hat{t}$ [c'est très rare].

Mise en garde au lecteur-étudiant. Tous les résultats énoncés précédemment (forme des solutions, structure de l'ensemble des solutions, existence et unicité de solution dans un problème de CAUCHY, etc.) l'ont été *pour des équations différentielles* $(\text{ed})_1$; ils peuvent tomber en défaut pour les équations différentielles (2.1).

Exemple 2.4.1 (Exemple 2.1.3 revisité) Résoudre (si possible)

$$ty' - y = 0 \quad \text{sur} I = \mathbb{R}.$$

Une solution y de cette équation différentielle doit
— être solution de

$$y' - \frac{1}{t}y = 0 \quad \text{sur} J_1 =]0, +\infty[\,,$$

donc de la forme $y(t) = Ct$, où C est une constante réelle ;
— être solution de

$$y' - \frac{1}{t}y = 0 \quad \text{sur} J_2 =]-\infty, 0[\,,$$

donc de la forme $y(t) = Dt$, où D est une constante réelle ;
— être dérivable en $\hat{t} = 0$, avec

$$0y'(0) - y(0) = 0.$$

Toutes ces contraintes sont satisfaites si, et seulement si, $C = D$. L'équation différentielle proposée a bien des solutions (ce qu'on ne pouvait dire a priori) et toutes ces solutions sont

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto y(t) = Ct, \quad \text{où } C \text{ est une constante réelle.}$$

Exemple 2.4.2 Intéressant... mais il y a du travail.
On considère l'équation différentielle suivante

$$\left(1-t^2\right)y' - 2ty = t^2.$$

Il est aisé de résoudre cette équation différentielle sur $]-\infty,-1[$, puis sur $]-1,+1[$, et enfin sur $]1,+\infty[$. Oui... mais y a-t-il des solutions sur $]-\infty,1[$? Sur $]-1,+\infty[$? Sur $\mathbb{R}$? Hé hé...

Exemple 2.4.3 Considérons le problème suivant

$$(\mathscr{P})\begin{cases} ty' - y = 0, \quad t \in \mathbb{R} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

qui ressemble à un problème de CAUCHY... mais n'en est pas un. Avec ce que nous avons vu à l'Exemple 2.4.1, on peut affirmer :

— $(\mathscr{P})$ n'a pas de solution si $y_0 = 1$;
— $(\mathscr{P})$ a une infinité de solutions si $y_0 = 0$.

Nous sommes loin des résultats du § 2.3.

⋆ 2.5 Un coup d'œil du côté du monde non linéaire

Considérons les deux équations différentielles suivantes :

$$y' - y = 0\,; \tag{2.8}$$

$$y' - y^2 = 0. \tag{2.9}$$

Elles se ressemblent... et pourtant elles sont très différentes. La première, la (2.8), est linéaire, on ne peut plus sympathique... Les solutions de (2.8) sont *définies sur tout* $\mathbb{R}$, elles sont

$$y : t \in \mathbb{R} \longmapsto y(t) = Ce^t, \quad \text{où } C \text{ est une constante réelle.}$$

Si on ajoute la condition $y(0) = y_0$, on détermine C, $C = y_0$.
Quid de (2.9) ? du problème de CAUCHY

$$\begin{cases} y' - y^2 = 0 \\ y(0) = y_0 \quad ? \end{cases} \tag{2.10}$$

Pour $y_0 = 0$, la fonction $y : t \in \mathbb{R} \longmapsto y(t) = 0$ est solution de (2.10). Mais y en a-t-il d'autres ? Ici, on ne peut affirmer par exemple que la somme de deux solutions de (2.9) est encore solution de (2.9). Par des raisons et avec des techniques qui seront présentées plus loin (au chapitre 6), le problème de CAUCHY (2.10) a une et une seule solution, laquelle est définie sur un intervalle ouvert I_{y_0}(le plus grand possible) qui dépend de y_0. En fait, la relation $y' = y^2$ fait que $y'(t)$ est tiré tellement fort (vers $+\infty$) que $y(t)$ « explose » en s'approchant d'un seuil limite $\overline{t}$.
Pour être tout à fait explicite, *la* solution de (2.10) définie sur un intervalle (contenant 0) le plus grand possible est :

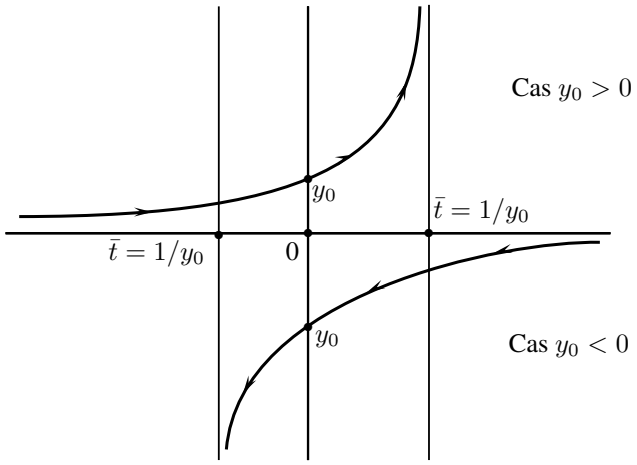


Figure 5

- Si $y_0 > 0$, $y(t) = \dfrac{y_0}{1 - y_0 t}$ sur $I_{y_0} = \left]-\infty, \dfrac{1}{y_0}\right[$;
- Si $y_0 < 0$, $y(t) = \dfrac{y_0}{1 - y_0 t}$ sur $I_{y_0} = \left]\dfrac{1}{y_0}, +\infty\right[$.

Cette équation différentielle non linéaire (2.9) (à cause du y^2) est là pour donner une idée des *difficultés du monde non linéaire* et des *différences majeures avec le monde linéaire.*
Toutefois, il y a des équations différentielles non linéaires qui, après changements de variables ou de fonctions, se ramènent à des équations différentielles linéaires (et donc susceptibles d'être traitées avec les résultats et techniques des chapitres 1 et 2). Des exemples seront vus en séances d'exercices.

Annexe 1 – Boîte à outils

Nous ajoutons quelques résultats et techniques à ceux présentés en Annexe 2 du chapitre 1.

• Dérivation de la fonction $t \in I \mapsto e^{u(t)}$.
Si u est une fonction dérivable sur l'intervalle I, alors il en est de même de la fonction $t \in I \mapsto y(t) = e^{u(t)}$, et sa dérivée vaut

$$y'(t) = u'(t)e^{u(t)}. \tag{2.11}$$

• Dérivation de la puissance d'une fonction
Si u est une fonction dérivable sur l'intervalle I et si α est un réel non nul, alors la fonction $t \in I \longmapsto y(t) = [u(t)]^{\alpha}$ est aussi dérivable sur I, avec

$$y'(t) = \alpha\,[u(t)]^{\alpha-1}\,u'(t). \tag{2.12}$$

Cette formule (2.12) est très générale et très facile d'utilisation (α peut être négatif, fractionnaire, etc.). Revoir ce que cette formule donne pour $\alpha = -1$, $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, $\alpha = -p$ (p entier positif).

• Règle de primitivation de $\dfrac{u'}{u}$.
Soit $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I. Alors :

— Si $u(t) > 0$ pour tout $t \in I$, une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ sur I est la fonction $\ln u : t \in I \longmapsto \ln[u(t)]$.

— Si $u(t) < 0$ pour tout $t \in I$, une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ sur I est la fonction $\ln u : t \in I \longmapsto \ln[-u(t)]$.

• Primitives des fonctions usuelles.
Dans ce chapitre, encore plus que dans le précédent, sont utiles : les primitives des fonctions usuelles, les règles de primitivation (ou antidérivation) de base (à découvrir ou redécouvrir progressivement).

Chapitre 3

Équations différentielles linéaires scalaires du deuxième ordre à coefficients fonctions continues

Avec ce chapitre nous abordons l'étude des équations différentielles linéaires scalaires du deuxième ordre à coefficients fonctions continues

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t), \quad t \in I$$

[c'est-à-dire, a, b et c sont des fonctions continues sur I], généralisant en cela ce qui a été vu au § 1.4 du chapitre 1 dans lequel a, b et c étaient supposés constants.

Les techniques et résultats utilisés sont les mêmes que ceux des chapitres 1 et 2. Une nouveauté s'ajoute : une technique de recherche de solution grâce aux séries entières (§ 3.2.3), que l'on peut passer en première lecture ; le b.a-ba en est rappelé en Annexe 1.

Un résultat d'existence et d'unicité (Théorème 3.1.1) est admis ; l'accent est mis plutôt sur la structure des solutions de ces équations différentielles et les différentes méthodes pour les résoudre.

Sommaire

3.1 Résolution de l'équation différentielle $(\mathrm{ed})_2$ lorsque le second membre δ est une fonction nulle 67
3.2 Résolution de l'équation différentielle complète $(\mathrm{ed})_2$ 80
Annexe 1 – B.a-ba des séries entières 88

Soit I un *intervalle ouvert* de $\mathbb{R}$, a, b, c et d des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ supposées *continues* sur I. L'équation différentielle étudiée dans ce chapitre est

$$\boxed{a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t), \quad t \in I.} \tag{3.1}$$

Ceci est une notation abrégée pour dire que l'on cherche une fonction deux fois dérivable $y : I \to \mathbb{R}$ telle que

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = d(t) \quad \text{pour tout } t \in I. \tag{3.2}$$

Bien sûr, on ne sait pas a priori si de telles fonctions existent. Notre étude concernera les situations où la fonction a ne s'annule pas sur I, comme dans le cas des équations différentielles du premier ordre (chapitre 2). Alors, (3.1) est équivalente à

$$\boxed{\begin{array}{l} y'' + \beta(t)y' + \gamma(t)y = \delta(t), \quad t \in I \\ \text{avec} \\ \beta := \dfrac{b}{a}, \quad \gamma := \dfrac{c}{a}, \quad \delta := \dfrac{d}{a} \quad \text{fonctions continues sur } I. \end{array}} \quad (\text{ed})_2$$

Comme on s'y attend, depuis que nous fréquentons le monde linéaire (chapitres 1 et 2), il faut associer à $(\text{ed})_2$ l'équation différentielle avec second membre nul ($\delta = 0$) ou homogène

$$y'' + \beta(t)y' + \gamma(t)y = 0, \quad t \in I. \tag{ed}_{2,0}$$

Les deux résultats qui suivent sont faciles :

- L'ensemble des solutions de $(\text{ed})_{2,0}$ est un sous-espace vectoriel de $E = C^2(I, \mathbb{R})$ (espace vectoriel des fonctions deux fois continûment dérivables sur I)
- Si y_p est une solution (dite particulière) de $(\text{ed})_2$, on a

$$\{\text{solutions de } (\text{ed})_2\} = \{\text{solutions de } (\text{ed})_{2,0}\} + y_p.$$

Reste à faire... l'essentiel, à savoir : étudier $(\text{ed})_{2,0}$ et donner des méthodes pour trouver une solution de $(\text{ed})_{2,0}$.

3.1 Résolution de l'équation différentielle $(\text{ed})_2$ lorsque le second membre δ est une fonction nulle

Ce paragraphe est dédié à l'étude de

$$y'' + \beta(t)y' + \gamma(t)y = 0, \quad t \in I. \tag{ed}_{2,0}$$

Contrairement au cas où β et γ sont des fonctions constantes (§ 4.1 du chapitre 1), il n'y a pas, pour résoudre $(\text{ed})_{2,0}$, de méthodes systématiques basées sur des prétendues équations caractéristiques. La raison en est que la dérivée d'une fonction $t \longmapsto e^{r(t)}$ est $r'(t)e^{r(t)}$ et non $r(t)e^{r(t)}$. L'examinateur-correcteur que je suis ne veut plus voir sur des copies « d'équation caractéristique $a(t)r^2 + b(t)r + c(t) = 0$ ».

3.1.1 Un résultat général d'existence et d'unicité de solutions

Nous attaquons ici un point dur... car nous sommes quelque peu démunis pour s'assurer de l'existence de solutions de $(\text{ed})_{2,0}$. Le théorème d'existence (et puis d'unicité) de solutions de $(\text{ed})_{2,0}$ (et puis de problèmes de CAUCHY associés) est un cas particulier d'un théorème général concernant les *systèmes différentiels linéaires* (ou équations différentielles linéaires vectorielles du premier ordre). Il y a un tour de passe-passe pour s'y ramener, qu'il convient de voir en détail la première fois. Le lecteur-étudiant est convié à suivre la démarche un crayon à la main.
Soit $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. On lui associe la fonction vectorielle (à valeurs dans $\mathbb{R}^2$) suivante :

$$\begin{array}{rccl} X & : & I & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \mapsto & X(t) := \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}. \end{array}$$

Notons immédiatement que $X'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$. Ainsi, si y est solution de $(\text{ed})_{2,0}$, c'est-à-dire si

$$y'' = -\beta(t)y' - \gamma(t)y,$$

on a

$$\begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma(t) & -\beta(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix},$$

soit encore

$$X'(t) = A(t)X(t) \qquad (\text{ED})_{1,0}$$

$$\text{où } A(t) := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma(t) & -\beta(t) \end{bmatrix}. \qquad (3.3)$$

En bref, si y est solution de $(\text{ed})_{2,0}$, alors $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ est solution de $(\text{ED})_{1,0}$. Réciproquement, considérons $t \longmapsto X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ solution de $(\text{ED})_{1,0}$. Que cela signifie t-il ? Cela indique précisément :

$$x_1'(t) = x_2(t)$$

et

$$x_2'(t) = -\gamma(t)x_1(t) - \beta(t)x_2(t),$$

d'où

$$x_1''(t) = -\gamma(t)x_1(t) - \beta(t)x_1'(t).$$

En bref, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est solution de $(\text{ED})_{1,0}$, alors sa deuxième composante x_2 est automatiquement la dérivée de la première composante x_1 et, surtout, la première composante x_1 est solution de $(\text{ed})_{2,0}$.

En résumé, la résolution de $(\mathrm{ed})_{2,0}$ équivaut à la résolution de $(\mathrm{ED})_{1,0}$, la solution de l'une fournit la solution de l'autre.

Oui mais, ce faisant, qu'a-t-on gagné, qu'a-t-on perdu ?

- On a gagné que $(\mathrm{ED})_{1,0}$ est une équation différentielle (toujours linéaire) mais *du premier ordre.*
- On a perdu que $(\mathrm{ED})_{1,0}$ est désormais une équation différentielle *vectorielle* (la fonction inconnue X est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$).

Cette manière de faire, consistant à ramener une équation différentielle d'ordre supérieur (deux, trois, etc.) à une équation différentielle d'ordre un sera vue à plusieurs reprises dans la suite. Nous dirons que $(\mathrm{ED})_{1,0}$ est la *forme déployée* (ou *forme vectorisée*) de $(\mathrm{ed})_{2,0}$.
Reste que nous avons déplacé notre problème : quid de la résolution de $(\mathrm{ED})_{1,0}$?
Le théorème qui suit, dont une démonstration est esquissée au chapitre 6, mais que l'on admet pour le moment, est un résultat d'existence et d'unicité pour le problème (dit) de Cauchy :

$$(\mathscr{C})\begin{cases} X' = A(t)X \\ X(t_0) = \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix} \end{cases}$$
$$\left[t_0 \in I, \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{donnés au départ} \right].$$

Grâce au « repliement » du cas vectoriel au cas scalaire (opération inversée du « déploiement »), nous le réécrivons dans notre configuration. Le problème de Cauchy dans ce contexte est celui de la résolution de $(\mathrm{ed})_{2,0}$ avec *deux conditions scalaires* particulières sur y et y' (ou bien *une condition vectorielle* particulière sur $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$) :

$$(\mathscr{C})\begin{cases} y'' + \beta(t)y' + \gamma(t)y = 0, \quad t \in I \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$
$$\left[t_0 \in I, \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{sont donnés au départ} \right].$$

Théorème 3.1.1 Pour tout jeu de données $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$, $y'_0 \in \mathbb{R}$, il existe *une et une seule solution* au problème de Cauchy $(\mathscr{C})$ énoncé au-dessus.

On parlera ainsi de *la* solution du problème de Cauchy $(\mathscr{C})$.

3.1.2 Ensemble des solutions de $(\mathrm{ed})_{2,0}$

Désignons par $\mathcal{V}$ l'ensemble des solutions de $(\mathrm{ed})_{2,0}$. Comme cela a déjà été dit, $\mathcal{V}$ est un sous-espace vectoriel de $E = C^2(I, \mathbb{R})$. Le théorème qui suit dit l'essentiel de $\mathcal{V}$.

Théorème 3.1.2

(I) $\mathcal{V}$ est un sous-espace vectoriel *de dimension 2*
(II) Si y_1 et y_2 sont solutions de $(\mathrm{ed})_{2,0}$, les trois assertions suivantes sont équivalentes :
(i) Les (*fonctions*) y_1 et y_2 sont *linéairement indépendantes*.
(ii) *Il existe* $\bar{t} \in I$ tel que les *vecteurs* $\begin{pmatrix} y_1(\bar{t}) \\ y_1'(\bar{t}) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y_2(\bar{t}) \\ y_2'(\bar{t}) \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ soient *linéairement indépendants*.
(iii) *Pour tout* $t \in I$, les *vecteurs* $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_1'(t) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y_2(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ sont *linéairement indépendants*.

Lorsque les solutions y_1 et y_2 de $(\mathrm{ed})_{2,0}$ sont linéairement indépendantes, on parle de (y_1, y_2) comme d'*un système fondamental de solutions* (de $(\mathrm{ed})_{2,0}$).
Avant de passer à la démonstration, méditer quelques instants sur la force (du point de vue *structurel*) de ce Théorème 3.1.2.

Démonstration :

(I) Soit $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ (la base canonique $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ par exemple), et considérons *la* solution y_1 (resp. *la* solution y_2) du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathrm{ed})_{2,0} \\ \begin{pmatrix} y(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} = \overrightarrow{e_1} \end{array} \right. \quad \left(\text{resp.} \left\{ \begin{array}{l} (\mathrm{ed})_{2,0} \\ \begin{pmatrix} y(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} = \overrightarrow{e_2} \end{array} \right. \right). \tag{3.4}$$

Nous prétendons que $\{y_1, y_2\}$ constitue une base de $\mathcal{V}$.

- *Point 1 :* $\{y_1, y_2\}$ est une partie génératrice de $\mathcal{V}$, c'est-à-dire que tout élément de $\mathcal{V}$ s'écrit comme une combinaison linéaire de y_1 et y_2. Soit donc $y \in \mathcal{V}$, une solution quelconque de $(\mathrm{ed})_{2,0}$. Le vecteur $\begin{pmatrix} y(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ s'écrit (de manière unique d'ailleurs) comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ (car $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$) : il existe des réels λ_1 et λ_2 tels que

$$\begin{pmatrix} y(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} = \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \lambda_2 \overrightarrow{e_2}.$$

  La (nouvelle) fonction

$$t \in I \longmapsto \overline{y}(t) := \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t)$$

  est aussi solution de $(\mathrm{ed})_{2,0}$ (est aussi dans $\mathcal{V}$). Mais comme

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \overline{y}(t_0) \\ \overline{y}'(t_0) \end{pmatrix} &= \lambda_1 \begin{pmatrix} y_1(t_0) \\ y_1'(t_0) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} y_2(t_0) \\ y_2'(t_0) \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \lambda_2 \overrightarrow{e_2} \quad \text{[rassurez-vous, ça a été fait pour !]}, \end{aligned}$$

y et $\overline{y}$ sont (deux) solutions du *même* problème de CAUCHY ; par suite, en raison du Théorème 3.1.1, on a $y = \overline{y}$; en d'autres termes, $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$, ce qu'on voulait démontrer.

- *Point 2 :* $\{y_1, y_2\}$ est une *partie libre* de $\mathcal{V}$, c'est-à-dire les fonctions y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes.

  Raisonnons par l'absurde, supposons que ce ne soit pas le cas : il existe des réels λ_1 et λ_2, non tous les deux nuls, tels que $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0$ (c'est une relation entre fonctions !), c'est-à-dire tels que

  $$\forall t \in I, \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t) = 0. \tag{3.5}$$

  Nous allons dérouler un raisonnement qui conduira à une contradiction. Il résulte de (3.5) :

  $$\forall t \in I, \lambda_1 y_1'(t) + \lambda_2 y_2'(t) = 0. \tag{3.6}$$

  Regroupant (3.5) et (3.6), nous avons :

  $$\forall t \in I, \lambda_1 \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_1'(t) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} y_2(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = 0. \tag{3.7}$$

  En particulier, en choisissant $t = t_0$ dans (3.7),

  $$\lambda_1 \begin{pmatrix} y_1(t_0) \\ y_1'(t_0) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} y_2(t_0) \\ y_2'(t_0) \end{pmatrix} = \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \lambda_2 \overrightarrow{e_2} = 0.$$

  Nous avons donc deux réels λ_1 et λ_2, non tous les deux nuls, tels que $\lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \lambda_2 \overrightarrow{e_2} = 0$. Ceci contredit l'indépendance linéaire des vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$.

Il faut retenir cette manière de faire, usuelle dans les questions d'équations différentielles : identifier (= égaler) différentes solutions grâce aux théorèmes d'existence et d'unicité relatifs aux problèmes de CAUCHY.

(II) La démonstration est similaire à celle de (I), en utilisant la technique rappelée ci-dessus.

$[(i) \Longrightarrow (iii)]$. Soit $\hat{t} \in I$, et considérons des réels λ_1 et λ_2 tels que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} y_1(\hat{t}) \\ y_1'(\hat{t}) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} y_2(\hat{t}) \\ y_2'(\hat{t}) \end{pmatrix} = 0. \tag{3.8}$$

Notre but est de démontrer que $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$ nécessairement. Le problème de CAUCHY

$$\begin{cases} (\mathrm{ed})_{2,0} \\ y(\hat{t}) = 0 \\ y'(\hat{t}) = 0 \end{cases}$$

a pour solutions la fonction identiquement nulle (bien sûr !) et la fonction $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ (ça a été fait pour, cf. (3.8). Par conséquent, toujours en raison du Théorème 3.1.1, $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0$. L'indépendance linéaire des fonctions y_1 et y_2 fait ensuite que $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$.

$[(iii) \Longrightarrow (ii)]$. Rien à dire.

$[(ii) \Longrightarrow (i)]$. Soit λ_1 et λ_2 deux réels tels que $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0$ (une relation entre fonctions), c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall t \in I, \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t) = 0. \tag{3.9}$$

Nous allons montrer que $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$ nécessairement.
Comme précédemment, il vient de (3.9) :

$$\forall t \in I, \lambda_1 y_1'(t) + \lambda_2 y_2'(t) = 0. \tag{3.10}$$

En somme, avec (3.9) et (3.10) :

$$\forall t \in I, \lambda_1 \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_1'(t) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} y_2(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = 0.$$

Faisons $t = \bar{t}$ (le $\bar{t}$ qui apparaît dans l'assertion (ii)) ; il vient

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} y_1(\bar{t}) \\ y_1'(\bar{t}) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} y_2(\bar{t}) \\ y_2'(\bar{t}) \end{pmatrix} = 0.$$

L'indépendance linéaire figurant en (ii) implique que $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$. □

3.1.3 Le wronskien comme testeur d'indépendance linéaire de solutions de $(\mathrm{ed})_{2,0}$

Si y_1 et y_2 sont deux solutions de $(\mathrm{ed})_{2,0}$, la fonction

$$\begin{aligned} w : t \in I \longmapsto w(t) &:= \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} \\ &= y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t) \end{aligned}$$

s'appelle le *wronskien* (ou déterminant de H.Wronski) associé à y_1 et y_2. On a vu au Théorème 3.1.2 que le test d'indépendance linéaire de y_1 et y_2 (solutions de $(\mathrm{ed})_{2,0}$!) est très simple :

- $w(\bar{t}) = 0$ pour *un certain* $\bar{t} \in I$, auquel cas il est *partout* nul sur I (et cela correspond exactement au cas où y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes) ou bien
- $w(t)$ n'est *jamais* nul (il suffit pour cela qu'il ne soit pas nul *quelque part* sur I) ; c'est exactement lorsque y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes.

Proposition 3.1.3 Le wronskien est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivant :

$$w'(t) + \beta(t)w(t) = 0. \tag{3.11}$$

En conséquence, w est de la forme

$$t \in I \longmapsto w(t) = Ce^{-B(t)}, \tag{3.12}$$

où B est une primitive de β sur I, et C une constante réelle.

Sachant que $t \longmapsto \displaystyle\int_{t_0}^{t} \beta(u)$ est la primitive de β sur I qui prend la valeur 0 en t_0 (et donc son exponentielle la valeur 1 en t_0), une autre façon d'exprimer la deuxième partie de la Proposition 3.1.3 est de dire que

$$\begin{cases} w(t) = w(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} \beta(u)du}, \\ \text{où } t_0 \text{ est un point quelconque de } I. \end{cases} \tag{3.13}$$

La formule (3.13) confirme bien ce qui a été dit plus haut : $w(t)$ s'annule partout sur I dès qu'il s'annule en un point t_0 de I.

Démonstration de la Proposition 3.1.3 :
Les fonctions y_1 et y_2 étant solutions de $(\text{ed})_{2,0}$, nous avons :

$$\begin{aligned} & y_1''(t) + \beta(t)y_1'(t) + \gamma(t)y_1(t) = 0 \\ \text{et} \\ & y_2''(t) + \beta(t)y_2'(t) + \gamma(t)y_2(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \in I. \end{aligned}$$

Comme $w = y_1y_2' - y_2y_1'$, nous déduisons de ce qui précède :

$$\begin{aligned} w'(t) &= \cancel{y_1'(t)y_2'(t)} + y_1(t)y_2''(t) - \cancel{y_2'(t)y_1'(t)} - y_2(t)y_1''(t) \\ &= y_1(t)\left[-\beta(t)y_2'(t) - \gamma(t)y_1(t)\right] - y_2(t)\left[-\beta(t)y_1'(t) - \gamma(t)y_1(t)\right] \\ &= -\beta(t)\left[y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)\right] \\ &= -\beta(t)w(t). \end{aligned}$$

C'est bien la relation différentielle annoncée. □

Illustrons la Proposition 3.1.3 sur le cas particulier des équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants (§ 1.4 du chapitre 1).

- Cas où l'équation caractéristique ($ar^2 + br + c = 0$) a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2
  Le wronskien associé aux solutions $y_1 : t \in \mathbb{R} \longmapsto y_1(t) = e^{r_1t}$ et $y_2 : t \in \mathbb{R} \longmapsto y_2(t) = e^{r_2t}$ est
  $$w(t) = \det \begin{bmatrix} e^{r_1t} & e^{r_2t} \\ r_1e^{r_1t} & r_2e^{r_2t} \end{bmatrix} = (r_1 - r_2)e^{(r_1+r_2)t}.$$

- Cas où l'équation caractéristique a une seule solution (réelle) r
  Le wronskien associé aux solutions $y_1 : t \in \mathbb{R} \longmapsto y_1(t) = e^{rt}$ et $y_2 : t \in \mathbb{R} \longmapsto y_2(t) = te^{rt}$ est
  $$w(t) = \det \begin{bmatrix} e^{rt} & te^{rt} \\ re^{rt} & (1 + rt)e^{rt} \end{bmatrix} = e^{2rt}.$$

- Cas où l'équation caractéristique a deux solutions complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ (avec $\beta \neq 0$)
  Le wronskien associé aux solutions $y_1 : t \in \mathbb{R} \longmapsto y_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ et $y_2 : t \in \mathbb{R} \longmapsto$

$y_2(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ est

$$\begin{aligned} w(t) &= \det \begin{bmatrix} e^{\alpha t}\cos(\beta t) & e^{\alpha t}\sin(\beta t) \\ e^{\alpha t}\left[\alpha\cos(\beta t) - \beta\sin(\beta t)\right] & e^{\alpha t}\left[\alpha\sin(\beta t) + \beta\cos(\beta t)\right] \end{bmatrix} \\ &= e^{2\alpha t}\beta. \end{aligned}$$

L'indépendance linéaire des fonctions y_1 et y_2 était acquise ici, car directement démontrable à partir des formulations explicites de y_1 et y_2 (ce que nous avons fait p. 33 du chapitre 1). Avec le test du wronskien $w(t)$, nous retrouvons ce résultat dans chacun des trois cas de figure.
Pour ce qui concerne (3.11), la formulation retenue pour l'équation différentielle dans ce paragraphe est

$$y'' + \frac{b}{a}y' + \frac{c}{a}y = 0.$$

Ici donc $-\beta(t) = -\dfrac{b}{a}$ = somme des racines de l'équation caractéristique, et on vérifie bien que $w'(t) = (r_1 + r_2)w(t)$ dans chacun des trois cas de figure considérés.

Remarques :

— Le test du wronskien est-il un test d'indépendance linéaire de deux fonctions (dérivables) ? Considérons les deux fonctions que voici :

$$y_1 : t \in \mathbb{R} \longmapsto y_1(t) = t^3, \quad y_2 : t \in \mathbb{R} \longmapsto y_1(t) = |t|^3.$$

Le choix est un peu « vicieux » puisque $y_2(t) = y_1(t)$ pour $t \geq 0$ et $y_2(t) = -y_1(t)$ pour $t \leq 0$. Un calcul de dérivées (à faire soigneusement, en s'aidant des représentations graphiques des fonctions si nécessaire) conduit à

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 3t^2, \quad y_1''(t) = 6t, \\ y_2'(t) &= 3t|t|, \quad y_2''(t) = 6|t|. \end{aligned}$$

Les deux fonctions y_1 et y_2 sont deux fois continûment dérivables sur $\mathbb{R}$ (elles sont donc dans $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$) et leur wronskien vaut

$$w(t) = y_1'(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Pourtant, y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes. En effet, avoir

$$\lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R} \tag{3.14}$$

conduit facilement à $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$ (il suffit par exemple de choisir $t = 1$ puis $t = -1$ dans (3.14)).
Est-ce contradictoire avec ce qui a été vu au § 3.1.3 ? Réponse : non, car le test d'indépendance linéaire de y_1 et y_2 à l'aide du wronskien associé ne s'adresse qu'à *des fonctions y_1 et y_2 solutions d'une équation différentielle du type* $(\text{ed})_{2,0}$. Cela signifie donc que les deux fonctions y_1 et y_2 introduites plus haut ne peuvent être solutions

d'une équation différentielle comme $(\text{ed})_{2,0}$.
De fait, si deux fonctions y_1 et y_2 de $C^2(I,\mathbb{R})$ sont telles que

$$w(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t) \neq 0 \quad \text{pour tout } t \in I,$$

alors elles sont solutions linéairement indépendantes (et donc constituent un système fondamental de solutions) de l'équation différentielle

$$\det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y \\ y_1' & y_2' & y' \\ y_1'' & y_2'' & y'' \end{bmatrix} = 0. \tag{3.15}$$

Noter que dans le développement du déterminant de (3.15) par rapport à la troisième colonne, le coefficient qui est devant y'' est précisément $y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)$...
C'est cette idée, sous forme cachée, que nous avons utilisée au § 1.4.1.3 du chapitre 1, pour démontrer que $y_1 : t \longmapsto y_1(t) = \cos(\omega t)$ et $y_2 : t \longmapsto y_2(t) = \sin(\omega t)$ conduisaient, par leurs combinaisons linéaires, à *toutes* les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad (\text{avec } \omega \neq 0). \tag{3.16}$$

— Le wronskien est intéressant à plus d'un titre. Si $w_{(y_1,y_2)}$ est le wronskien associé à un système fondamental de solutions de $(\text{ed})_{2,0}$ et si $w_{(z_1,z_2)}$ est le wronskien associé à *un autre* système fondamental de solutions de cette même équation différentielle $(\text{ed})_{2,0}$, la Proposition 3.1.3 nous assure que $w_{(y_1,y_2)}$ et $w_{(z_1,z_2)}$ sont les mêmes à une constante multiplicative $c \neq 0$ près :

$$w_{(z_1,z_2)} = c w_{(y_1,y_2)}, \quad \text{où } c \neq 0.$$

Connaître le wronskien est une information précieuse dans la recherche d'un système fondamental de solutions de $(\text{ed})_{2,0}$.

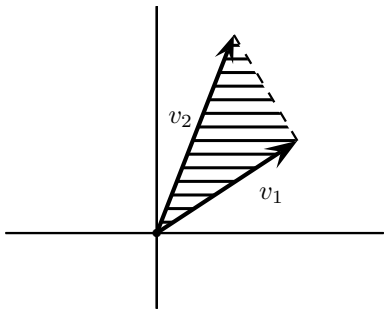
— Considérons le cas d'équations différentielles $(\text{ed})_{2,0}$ où $\beta(t) = 0$ (pas de terme en y'), comme dans (3.16) par exemple. Alors, le wronskien w associé à un système fondamental de solutions (y_1, y_2) est *une constante non nulle* C. Il représente, à un coefficient multiplicatif près, l'aire du triangle (de $\mathbb{R}^2$) de côtés $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_1'(t) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y_2(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix}$ (respectivement v_1 et v_2 sur la Figure 1).

A l'issue de ces sous-paragraphes 3.1.1, 3.1.2 et 3.1.3, on peut clamer :

Désormais la chasse à deux solutions linéairement indépendantes de $(\text{ed})_{2,0}$ est ouverte !

3.1.4 Technique de recherche d'une autre solution de $(\text{ed})_{2,0}$ quand on en connaît déjà une

Supposons connue *une* solution y_1 de $(\text{ed})_{2,0}$; nous allons prendre appui sur elle pour en trouver une autre, de sorte que (y_1, y_2) constitue une système fondamental de solutions.
Supposons que $y_1(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$ (I restant l'intervalle ouvert sur lequel les fonctions β



Triangle dont l'aire ne varie pas avec t

Figure 1

et γ dans $(\mathrm{ed})_{2,0}$ sont continues). Considérons $y := y_1 z$ (ou bien $z = \dfrac{y}{y_1}$).

Analyse de la situation : Cherchons les conditions que doit vérifier la fonction z pour que $y := y_1 z$ soit solution de $(\mathrm{ed})_{2,0}$. Allons-y :

$$y' = (y_1 z)' = y_1' z + y_1 z'$$
$$y'' = y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z''$$

On doit avoir

$$(y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z'') + \beta(t)(y_1' z + y_1 z') + \gamma(t) y_1 z = 0,$$

soit encore

$$z \underbrace{\left[y_1'' + \beta(t) y_1' + \gamma(t) y_1\right]}_{=0 \text{ car } y_1 \text{ est solution de } (\mathrm{ed})_{2,0}} + y_1 z'' + \left[2y_1' + \beta(t) y_1\right] z' = 0,$$

d'où

$$z'' + \left(\frac{2y_1'(t) + \beta(t) y_1(t)}{y_1(t)}\right) z' = 0. \tag{3.17}$$

C'est une « fausse » équation différentielle du deuxième ordre ; posons $u := z'$, de manière à se ramener à

$$u' + \left(\frac{2y_1'(t) + \beta(t) y_1(t)}{y_1(t)}\right) u = 0, \tag{3.18}$$

une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre (telle qu'étudiée au chapitre 2). Après calculs, on arrive aux solutions

$$t \in I \longmapsto u(t) = C_2 \frac{e^{-B(t)}}{y_1^2(t)}, C_2 \in \mathbb{R}, \tag{3.19}$$

où B désigne une primitive de la fonction β sur I [le vérifier avec un simple calcul de dérivées]. Il reste un calcul de primitive de plus à faire ; en effet, résoudre $z' = u$ (donnée en (3.19))

conduit à

$$t \in I \longmapsto z(t) = C_2 v(t) + C_1, C_1 \in \mathbb{R},$$

où v est une primitive de $\dfrac{e^{-B}}{y_1^2}$ sur I.
On arrive ainsi à la proposition de

$$y_2 : t \in I \longmapsto y_2(t) = y_1(t)v(t)$$

comme solution de $(\text{ed})_{2,0}$.

Synthèse : Soit $y_2 : t \in I \longmapsto y_2(t) := y_1(t)v(t)$, où v est une primitive de $\dfrac{e^{-B}}{y_1^2}$ sur I et B une primitive de β sur I. Alors, y_1 est une solution de $(\text{ed})_{2,0}$ car (on a tout fait pour ça !) :

$$\begin{aligned}
y_2'(t) &= y_1'(t)v(t) + y_1(t)v'(t) = y_1'(t)v(t) + \frac{e^{-B(t)}}{y_1(t)} \\
y_2''(t) &= y_1''(t)v(t) + y_1'(t)v'(t) + \frac{y_1(t)(-\beta(t))e^{-B(t)} - e^{-B(t)}y_1'(t)}{y_1^2(t)} \\
&= y_1''(t)v(t) - \beta(t)\frac{e^{-B(t)}}{y_1(t)},
\end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
&y_2''(t) + \beta(t)y_2'(t) + \gamma(t)y_2(t) = \\
&\left[y_1''(t)v(t) - \beta(t)\frac{e^{-B(t)}}{y_1(t)}\right] + \beta(t)\left[y_1'(t)v(t) + \frac{e^{-B(t)}}{y_1(t)}\right] + \gamma(t)\left[y_1(t)v(t)\right] \\
&= \underbrace{\left[y_1''(t) + \beta(t)y_1'(t) + \gamma(t)y_1(t)\right]v(t)}_{=0 \text{ car } y_1 \text{ est solution de } (\text{ed}_{2,0}).}
\end{aligned}$$

$y_2 = y_1 v$ est solution de $(\text{ed})_{2,0}$... oui, mais est-on sûr que y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes ? Vérifions cela à l'aide du wronskien qui leur est associé. On a

$$t \in I \longmapsto w(t) = \det\begin{bmatrix} y_1(t) & y_1(t)v(t) \\ y_1'(t) & (y_1 v)'(t) \end{bmatrix} = y_1^2(t)v'(t) = e^{-B(t)},$$

d'où : $w(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$. Ainsi, y_1 (donnée au départ) et y_2 (construite par le procédé exposé plus haut) sont bien deux solutions linéairement indépendantes de $(\text{ed})_{2,0}$.

Résumé de la méthode :

- Partir d'une solution y_1 de $(\text{ed})_{2,0}$ [telle que $y_1(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$]. Ecrire ce qu'il faut pour que $y_2 := y_1 z$ soit solution de $(\text{ed})_{2,0}$.
- L'équation différentielle en z qui en résulte est une « fausse » équation différentielle du deuxième ordre. *Le vérifier est un point confortant que la procédure suit son cours.*
- Résoudre l'équation différentielle en $u = z'$. *Inutile de traîner des constantes, on est à la recherche d'<u>une</u> solution (non nulle).*
- Avec la solution v obtenue, former $y_2 = y_1 v$.

Au final, (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions de $(\text{ed})_{2,0}$.

Remarque : Il peut être troublant que l'on exige de la solution donnée y_1 de $(\text{ed})_{2,0}$ de ne pas s'annuler sur I. En fait, la procédure préconisée fonctionne sur tout intervalle ouvert $J \subset I$ sur lequel une solution y_1 de $(\text{ed})_{2,0}$ ne s'annule pas. Ensuite, une fois qu'on a obtenu y_2 sur J, il n'y a pas de difficulté à la prolonger sur tout I. A titre d'exemple, le lecteur-étudiant pourra considérer l'équation différentielle

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad (\text{avec}\, \omega > 0),$$

et partir de $y_1 : t \in \mathbb{R} \longmapsto y_1(t) = \cos(\omega t)$, solution de $(\text{ed})_{2,0}$. Avec la méthode présentée plus haut, appliquée sur $J = \left]-\dfrac{\pi}{2\omega}, \dfrac{\pi}{2\omega}\right[$, il arrivera à exhiber $y_2 : t \in \mathbb{R} \longmapsto y_2(t) = \dfrac{1}{\omega}\sin(\omega t)$. Et, bien sûr, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\omega}\sin(\omega t)$ prolongée à tout $\mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle proposée.

Exemple 3.1.4 Reprenons l'exemple des équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants (§ 1.4 du chapitre 1)

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{3.20}$$

dans le cas où le trinôme caractéristique $ax^2 + bx + c$ n'a que des racines réelles (soit deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, soit une racine double r). C'est précisément la méthode présentée au § 3.1.4 que nous avons utilisée aux § 1.4.1.1 et 1.4.1.2 du chapitre 1. Ainsi, dans la situation où r est la racine double du trinôme caractéristique :

- La fonction $t \in \mathbb{R} \longmapsto y_1(t) = e^{rt}$ est solution de $(\text{ed})_{2,0}$ (et, bien sûr, $y_1(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$)
- Considérer une fonction z telle que $y_2 = e^{rt}z$ soit solution de (3.20) conduit à $z'' = 0$.

Par suite, on peut prendre $z : t \in \mathbb{R} \longmapsto z(t) = t$, ce qui conduit à la nouvelle solution $y_2 : t \in \mathbb{R} \longmapsto y_2(t) = te^{rt}$ de $(\text{ed})_{2,0}$.

Exemple 3.1.5 On considère l'équation différentielle suivante :

$$y'' - \frac{1}{t+1}y' - \frac{t}{t+1}y = 0, \quad t \in I =]-1, +\infty[\,. \tag{3.21}$$

Il faut bien démarrer par une solution y_1 de (3.21)... Il n'y a pas de méthode générale pour en trouver une, too bad... On est sympa, on vous en donne une : $t \in I \longmapsto y_1(t) = e^t$ est solution de $(\text{ed})_{2,0}$ (cela se vérifie très facilement).
Cherchons les conditions que doit vérifier la fonction z pour que $y := e^t z$ soit solution de (3.21). On arrive aisément à

$$z'' + \frac{2t+1}{t+1}z' = 0,$$

soit encore, après avoir posé $u := z'$,

$$u' - \frac{2t+1}{t+1}u = 0. \tag{3.22}$$

La résolution de (3.22) conduit à $t \in I \longmapsto u(t) = (t+1)e^{-2t}$ (ceci est *un* exemple de solution non nulle de (3.22)), d'où

$$z(t) = -\frac{3}{4}e^{-2t} - \frac{t}{2}e^{-2t}, \quad t \in I \quad \text{(par exemple)}.$$

Une solution y_2 de (3.22) est donc fournie par

$$t \in I \longmapsto y_2(t) = e^t z(t) = e^{-t}\left(-\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\right)$$

et *on sait* que (y_1, y_2) constitue un système fondamental de solutions de (3.21). La solution générale de (3.21) est donc

$$t \in I \longmapsto y(t) = C_1 e^t + C_2(2t+3)e^{-t},$$

avec C_1 et C_2 réels.

3.2 Résolution de l'équation différentielle complète $(\mathrm{ed})_2$

Nous revenons à l'équation différentielle complète

$$y'' + \beta(t)y' + \gamma(t)y = \delta(t), \quad t \in I. \tag{ed}_2$$

On a étudié au § 3.1 la situation où δ est la fonction nulle. Mais ici, avec un second membre δ fonction continue sur I, la première question – incontournable diraient les journalistes – est : l'équation différentielle $(\mathrm{ed})_2$ a-t-elle des solutions ? Nous répondrons positivement à cette question, et, ce faisant, nous allons donner une méthode pour trouver effectivement une solution de $(\mathrm{ed})_2$ (§ 3.2.1). Nous continuerons par deux autres techniques (dont une n'est pas vraiment nouvelle, § 3.2.2) pour trouver des solutions de $(\mathrm{ed})_2$.

3.2.1 La méthode de « la variation des constantes »

Cette méthode s'apparente à celle de même nom vue à l'occasion de l'étude des équations différentielles linéaires du premier ordre (§ 2.2.1 du chapitre 2), sauf qu'ici ce sont *deux* constantes qui vont varier...
Supposons que l'on dispose de deux solutions linéairement indépendantes y_1 et y_2 de $(\mathrm{ed})_{2,0}$ (celle-ci étant l'équation différentielle sans second membre ou homogène associée à $(\mathrm{ed})_2$). On sait que la solution générale de $(\mathrm{ed})_{2,0}$ est

$$t \in I \longmapsto C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t),$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles. Comment s'en servir pour trouver une solution de $(\mathrm{ed})_2$? On va chercher (et, de fait, on va trouver !) une solution y_p de $(\mathrm{ed})_2$ de la forme

$$t \in I \longmapsto y_p(t) = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t) \tag{3.23}$$

où C_1 et C_2 sont des fonctions de t, dérivables sur I (ce ne seront plus des constantes, d'où le nom de la méthode).

Analyse de la situation : Comment s'arranger pour que y_p, définie en (3.23), soit solution de $(\mathrm{ed})_2$?
En dérivant y_p une première fois, on obtient

$$y_p'(t) = C_1(t)y_1'(t) + C_1'(t)y_1(t) + C_2(t)y_2'(t) + C_2'(t)y_2(t).$$

N'oublions pas que l'on cherche *une* solution de $(\mathrm{ed})_2$. On va donc simplifier l'expression ci-dessus en imposant

$$C_1'(t)y_1(t) + C_2'(t)y_2(t) = 0. \tag{3.24}$$

La pertinence de cette manière de faire est justifiée a posteriori... Par suite, en dérivant y_p' cette fois, il n'y a pas de terme en C_1'' ou C_2'', et on a :

$$y_p''(t) = C_1(t)y_1''(t) + C_1'(t)y_1'(t) + C_2(t)y_2''(t) + C_2'(t)y_2'(t).$$

En « injectant » les résultats des calculs de $y_p'(t)$ et $y_p''(t)$ dans $(\text{ed})_2$ (car on souhaite que y_p soit solution de $(\text{ed})_2$!), il vient :

$$C_1'(t)y_1'(t) + C_2'(t)y_2'(t) = \delta(t) \tag{3.25}$$

(tous les autres termes ont disparu car, ne l'oublions pas, y_1 et y_2 sont solutions de $(\text{ed})_{2,0}$).

(3.24)-(3.25) : voilà ce à quoi on aboutit... mais le système (3.24)-(3.25) est-il résoluble ? Il s'agit d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues ($C_1'(t)$ et $C_2'(t)$) :

$$\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta(t) \end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

Or, le déterminant de la matrice de ce système est $y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)$, coucou revoilà le wronskien associé à y_1 et y_2 ! Comme ce wronskien n'est pas nul (car y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de $(\text{ed})_{2,0}$, cf. § 3.1.3, le système admet une et une seule solution (facilement exprimable à l'aide des données) ; $C_1'(t)$ et $C_2'(t)$ sont déterminés de manière unique et sont des fonctions continues sur I.
On continue en prenant une primitive de chacune des fonctions obtenues ; le résultat, la fonction $t \in I \longmapsto y_p(t) = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t)$ est candidat pour être solution de $(\text{ed})_2$. Le procédé semble donc viable.

Synthèse : Partons du système linéaire (3.26) et remontons le cours du raisonnement fait lors de l'analyse de la situation.
En utilisant par exemple les formules de CRAMER, on a la forme explicite de $C_1'(t)$ et $C_2'(t)$ solutions de (3.26) :

$$\left.\begin{aligned} C_1'(t) &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(t) \\ \delta(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}}{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)} = -\frac{\delta(t)y_2(t)}{w(t)}, \\ C_2'(t) &= \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & 0 \\ y_1'(t) & \delta(t) \end{vmatrix}}{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)} = \frac{\delta(t)y_1(t)}{w(t)}. \end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

Les fonctions mises en évidence à droite dans les formules (3.27) sont des fonctions continues (de t) sur I. Soit donc C_1 et C_2 deux fonctions dérivables sur I telles que

$$C_1' = -\frac{\delta y_2}{w} \quad \text{et} \quad C_2' = \frac{\delta y_1}{w} \quad \text{sur } I$$

et posons

$$y_p : t \in I \longmapsto y_p(t) = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t).$$

Alors, en reproduisant les calculs faits plus haut (cf. (3.24) et (3.25)), on vérifie bien que

$$y_p'' + \beta(t)y_p' + \gamma(t)y_p = \delta(t), \quad t \in I.$$

On a ainsi démontré l'*existence* d'une solution de $(\mathrm{ed})_2$ et donné une *méthode* pour y arriver. C'est précisément le procédé que nous avons utilisé au § 1.4.2.1 du chapitre 1, lors de l'étude d'une équation différentielle $(\mathrm{ed})_2$ à coefficient (β et γ) constants.
Au lecteur-étudiant : Inutile de retenir les formules (3.24)-(3.25) ou le système linéaire (3.26), mais bien la *méthode* pour y arriver. Elle est résumée dans le tableau qui suit :

— Partir de deux solutions y_1 et y_2 linéairement indépendantes de $(\mathrm{ed})_{2,0}$ (l'équation différentielle homogène associée à $(\mathrm{ed})_2$), et proposer

$$y_p : t \in I \longmapsto y_p(t) = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t).$$

— Dériver y_p et « tuer » les termes en C_1' et C_2' ; ça vous donne une première équation linéaire (en les variables C_1' et C_2'). *C'est facile à retenir : il ne faut pas qu'au coup suivant (en dérivant une fois de plus) il y ait des termes en C_1'' et C_2''.*
— Dériver y_p' pour avoir y_p''. « Injecter » le tout (y_p, y_p', y_p'') dans la formulation de $(\mathrm{ed})_2$; cela vous donnera une deuxième équation linéaire (en les variables C_1' et C_2').
— Résoudre le système linéaire de deux équations à deux inconnues (C_1' et C_2') qui en résulte.
— Prendre une primitive C_1 de C_1' et une primitive C_2 de C_2'. *Inutile de traîner des constantes additives, on est à la recherche* d'une *solution.*

Le résultat $t \in I \longmapsto C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t)$ est une solution de $(\mathrm{ed})_2$.

3.2.2 Technique de recherche d'une solution de $(\mathrm{ed})_2$ quand on connaît une solution de $(\mathrm{ed})_{2,0}$

Si l'on connaît une solution non nulle y_1 de l'équation différentielle homogène $(\mathrm{ed})_{2,0}$ associée à $(\mathrm{ed})_2$, on peut procéder, mutatis mutandis, comme au § 3.1.4 : on cherche les conditions sur z pour que $y := y_1 z$ soit solution de l'équation différentielle complète $(\mathrm{ed})_2$; les calculs conduisent à

$$y_1(t)z'' + \left[2y_1'(t) + \beta(t)y_1(t)\right] z' = \delta(t), \quad t \in I,$$

c'est-à-dire, en posant $z' = u$, à une équation différentielle linéaire du premier ordre (complète cette fois-ci). Voir le § 2.2 du chapitre 2.

Question : Qu'est-ce qui vous paraît, à vous lecteur-étudiant, le plus efficace (= le plus rapide, les calculs plus faciles), la méthode du § 3.2.1 ou celle du § 3.2.2 ?
Réponse : Ca dépend des cas, mais en règle générale il y a à peu près les mêmes calculs (de primitives) à effectuer, en nombre et en difficultés.

C'est le moment, ici, de compléter le Théorème 3.1.1 sur le problème de Cauchy avec une équation différentielle du type $(\mathrm{ed})_2$. Comme nous l'avons déjà observé (p. 67),

$$\{\text{solutions de } (\mathrm{ed})_2\} = \{\text{solutions de } (\mathrm{ed}_{2,0})\} + y_p,$$

où y_p est une solution (dite particulière) de $(\mathrm{ed})_2$. Comme dans le cas des équations différentielles du deuxième ordre à coefficients constants (p. 36 du Chapitre 1), l'ensemble des solutions est structuré en *plan affine* (= translaté d'un plan vectoriel) de $C^2(I, \mathbb{R})$.

Théorème 3.2.1 Pour tout jeu de données $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$, $y_0' \in \mathbb{R}$, il existe *une et une seule* solution au problème de CAUCHY

$$(\mathscr{C}) \begin{cases} y'' + \beta(t)y' + \gamma(t)y = \delta(t), & t \in I \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0'. \end{cases}$$

On peut à présent se poser la question de ce qu'il advient de l'équation différentielle (3.1)

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t), \quad t \in I \tag{3.1}$$

lorsque (la fonction continue) a s'annule en certains points. La réponse est la même que celle apportée pour les équations différentielles du premier ordre (§ 2.4 du chapitre 2). Reprenons la méthodologie rapidement. Supposons par exemple que $I = \mathbb{R}$ et que a s'annule en un seul point $\hat{t}$. Alors :

— On commence par ce qu'on sait faire ; on résout

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t), \quad t \in I, \tag{3.1'}$$

sur $]-\infty, \hat{t}[$ puis sur $]\hat{t}, +\infty, [$ (comme s'il s'agissait de deux équations différentielles différentes).

— On essaie (il n'est pas sûr qu'on y arrive !) de raccorder une solution de (3.1)' sur $]-\infty, \hat{t}[$ et une solution de (3.1)' sur $]\hat{t}, +\infty, [$ de sorte que la fonction prolongée (en $\hat{t}$) soit deux fois dérivable (sur $I = \mathbb{R}$), en $\hat{t}$ notamment, et vérifie

$$a(\hat{t})y''(\hat{t}) + b(\hat{t})y'(\hat{t}) + c(\hat{t})y(\hat{t}) = d(\hat{t}).$$

⋆ 3.2.3 Technique de résolution à l'aide de séries entières

Il faut prendre conscience que même pour des équations différentielles du second ordre très simples, du type $(\text{ed})_{2,0}$ par exemple, les seules solutions (non nulles) connues sont des fonctions (dites *spéciales*) qui ne peuvent être obtenues par primitivation des fonctions usuelles que le lecteur-étudiant connaît. Essayez donc de résoudre l'équation différentielle suivante, appelée d'AIRY,

$$y'' - ty = 0 \ ? \tag{3.28}$$

Si vous y arrivez, je vous promets un cadeau gastronomique du Pays basque...
Une corde de plus dans notre arc est la recherche de solutions sous forme de *séries entières* (voir l'Annexe 1 pour vous inoculer le b.a-ba des séries entières). Mais ce n'est pas seulement une technique, il y a des résultats mathématiques de portée générale (c'est-à-dire des théorèmes) derrière. En voici un (admis).

Théorème 3.2.2 Soit l'équation différentielle

$$y'' + \beta(t)y' + \gamma(t)y = 0, \quad t \in I \tag{$\text{ed}_{2,0}$}$$

où

$$\beta(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n,\quad \gamma(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nt^n,\quad \text{pour } t\in\,]-R,+R[\quad (0<R\leq+\infty),$$

avec a_n, b_n réels pour tout $n\in\mathbb{N}$. Alors, toute solution de $(\mathrm{ed})_{2,0}$ définie dans $]-R,+R[$ s'écrit comme $y(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nt^n$, avec c_n réel pour tout $n\in\mathbb{N}$.

En particulier, l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases}(\mathrm{ed})_{2,0}\\ y(0)=y_0, y'(0)=y_0'\end{cases}$$

est obtenue en posant $c_0=y_0$ et $c_1=y_0'$ (on est d'accord ?).
En pratique, comment procède t-on ? Voici la méthode à suivre, illustrée ensuite par des exemples.

- On part d'une série entière $y(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nt^n$ candidate à être solution de $(\mathrm{ed})_{2,0}$ [avec, donc, des coefficients c_n à déterminer].
- Connaissant $y'(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}nc_nt^{n-1}$ et $y''(t)=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)c_nt^{n-2}$, on « injecte » les données $y(t), y'(t)$ et $y''(t)$ dans $(\mathrm{ed})_{2,0}$. Par identification, on obtient ainsi une relation de récurrence entre les coefficients c_n, lesquels sont ensuite complètement déterminés à l'aide des deux premiers c_0 et c_1.
- On s'assure ensuite que la série entière mise en évidence a un rayon de convergence $R>0$.

Cela permet d'obtenir une solution, voire deux solutions linéairement indépendantes, de $(\mathrm{ed})_{2,0}$ sur $]-R,+R[$. Parfois, on reconnaît des fonctions usuelles développées en séries entières, parfois pas. Il peut s'agir de nouvelles fonctions (autres que celle connues du lecteur-étudiant) qui sont ainsi introduites.

Exemple 3.2.3 Appliquons la technique préconisée au-dessus à

$$y''-y=0. \tag{3.29}$$

Si $y(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nt^n$ sur $]-R,+R[$ (R, comme les c_n, fait partie des inconnues), on a $y''(t)=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)t^{n-2}$ sur $]-R,+R[$, de sorte que (3.29) se réécrit

$$\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)c_nt^{n-2}-\sum_{n=0}^{+\infty}c_nt^n=0,\quad t\in\,]-R,+R[\,. \tag{3.30}$$

C'est là qu'il y a une petite difficulté (du moins la première fois qu'on voit ça) : *il faut tout réécrire avec un même indice, disons m, de manière à se ramener à une situation où*

$$\sum_{m=0}^{+\infty}(\dots)_m t^m = 0, \quad t \in]-R,+R[\,,$$

ce qui conduira à -c'est là la force des séries entières-

$$(\dots)_m = 0 \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{N}.$$

Allons-y. Avec $m := n-2$, on a $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n t^{n-2} = \sum_{m=0}^{+\infty}(m+1)(m+2)c_{m+2}t^m$. D'où, (3.30) devient

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\left[(m+1)(m+2)c_{m+2} - c_m\right]t^m = 0, \quad t \in]-R,+R[\,.$$

Il s'ensuit

$$(m+1)(m+2)c_{m+2} - c_m = 0 \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{N},$$

soit encore

$$c_{m+2} = \frac{c_m}{(m+1)(m+2)} \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{N}. \tag{3.31}$$

Connaissant c_0 et c_1, on en déduit ainsi c_m pour tout $m \in N$. Par exemple,

- $c_0 = 1$ et $c_1 = 0$ conduisent avec (3.31) à $\begin{cases} c_{2n} = \dfrac{1}{(2n)!} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ c_{2n+1} = 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}; \end{cases}$
- $c_0 = 0$ et $c_1 = 1$ conduisent avec (3.31) à $\begin{cases} c_{2n+1} = \dfrac{1}{(2n+1)!} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ c_{2n} = 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Les deux séries entières $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$ ont un rayon de convergence $R = +\infty$, on reconnaît en leurs sommes les fonctions $t \longmapsto \operatorname{ch} t$ et $t \longmapsto \operatorname{sh} t$. Que ces deux fonctions soient solutions de (3.29) n'est évidemment pas une nouveauté ici...

Exemple 3.2.4 Recherchons une solution, sous forme de série entière, de l'équation différentielle

$$ty'' + 2y' + \omega^2 ty = 0, \quad \text{où } \omega \text{ est une constante réelle.} \tag{3.32}$$

Partant de $y(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$ pour $t \in]-R,+R[$, la méthode préconisée conduit, après quelques calculs simples, à :

$$\begin{cases} c_1 = 0, c_2 = -\dfrac{\omega^2}{2}, \\ c_{m+1} = -\dfrac{\omega^2}{(m+1)(m+2)}c_{m-1} \quad \text{pour tout } m \geq 2. \end{cases}$$

Par suite :

$$\begin{cases} c_{2n+1} = 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ c_{2n} = (-1)^n \dfrac{\omega^{2n}}{(2n+1)!} c_0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Le rayon de convergence de la série entière résultant est $R = +\infty$; la fonction solution est

$$y(t) = c_0 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\omega^{2n} t^{2n}}{(2n+1)!}. \tag{3.33}$$

Se rappelant que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}$ est le développement en série entière (rayon de convergence $R = +\infty$) de la fonction usuelle $\sin u$, on reconnaît en (3.33) la fonction $c_0 \dfrac{\sin(\omega t)}{t}$.

Ainsi, la fonction $y : t \in]0, +\infty[\longmapsto y(t) = \dfrac{\sin(\omega t)}{t}$ est une solution de

$$y'' + \frac{2}{t} y' + \omega^2 y = 0, \quad t \in]0, +\infty[,$$

ce qui, avouons-le, ne saute pas aux yeux.

Exemple 3.2.5 L'exemple que voici est plus élaboré, il concerne l'équation différentielle d'Airy,

$$y'' - ty = 0.$$

Partant avec la fonction candidate $y(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$ pour $t \in]-R, +R[$, la méthode préconisée conduit à

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n t^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^{n+1} = 0,$$

soit encore

$$\sum_{m=0}^{+\infty} (m+2)(m+1) c_{m+2} t^m - \sum_{m=1}^{+\infty} c_{m-1} t^m = 0,$$

$$c_2 + \sum_{m=1}^{+\infty} \left[(m+2)(m+1) c_{m+2} - c_{m-1} \right] t^m = 0.$$

On en déduit :

$$c_2 = 0, \quad \text{et} \quad (m+2)(m+1) c_{m+2} - c_{m-1} = 0 \quad \text{pour tout } m \geq 1. \tag{3.34}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} c_0 \text{ et } c_1 \text{ sont arbitraires}, \\ c_2 = 0, \\ c_p = \dfrac{1}{p(p-1)} c_{p-3} \quad \text{pour tout } p \geq 3. \end{cases}$$

A présent, choisissons :

- $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, ce qui implique qu'il n'y a plus que des termes en t^{3p}, d'où

$$y_1(t) = 1 + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1.4.7 \dots (3p-2)}{(3p)!} t^{3p}; \tag{3.35}$$

- $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, ce qui implique qu'il n'y a plus que des termes en t^{3p+1}, d'où

$$y_2(t) = t + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2.5.8 \dots (3p-1)}{(3p+1)!} t^{3p+1}. \tag{3.36}$$

On vérifie sans trop de peine que les séries entières définissant y_1 et y_2 (en (3.35) et (3.36) respectivement) sont convergentes pour tout $t \in \mathbb{R}$ (le rayon de convergence est $R = +\infty$.) On a ainsi mis en évidence deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle d'AIRY (l'une est solution du problème de CAUCHY avec les conditions $y_1(0) = 1$ et $y_1'(0) = 0$, l'autre avec les conditions $y_2(0) = 0$ et $y_2'(0) = 1$).
Les fonctions y_1 et y_2 sont appelées fonctions spéciales d'AIRY, du nom de l'astronome G.B.AIRY qui les introduisit pour ses calculs d'optique.

Un autre exemple est l'équation différentielle de BESSEL

$$t^2 y'' + ty' + (t^2 - \nu^2) y = 0,$$

où ν est un paramètre. Sa résolution donne naissance aux fonctions (spéciales) dites de BESSEL, lesquelles interviennent dans beaucoup de problèmes de physique... et font parfois les délices de sujets d'examens ou de concours.

⋆ Annexe 1 – B.a-ba des séries entières

• On appelle *série entière* (ou *série de puissances*) une série de fonctions dont le terme général est $t \in \mathbb{R} \longmapsto u_n(t) = c_n t^n$. Ici $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels appelée *suite des coefficients de la série entière*. La question de la convergence de la série entière de terme général $c_n t^n$ est réglée de la manière suivante : il existe $0 \leq R \leq +\infty$ telle que

$$\begin{cases} \bullet & \text{la série converge si } |t| < R; \\ \bullet & \text{la série diverge si } |t| > R. \end{cases}$$

Cas limites :

- Si $R = 0$, la série ne converge que pour $x = 0$. Situation sans intérêt.
- Si $R = +\infty$, la série converge pour tout $t \in \mathbb{R}$. C'est la situation de confort.

En règle générale, sur $]-R, +R[$, appelé intervalle de convergence de la série, « tout se passe bien » pour la fonction f somme de la série

$$t \in]-R, +R[\longmapsto f(t) := \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n,$$

c'est-à-dire, on peut opérer sur f comme sur les fonctions polynomiales (dont les sommes de séries entières sont des généralisations) : f est dérivable (ou primitivable) autant de fois que l'on veut, avec

$$\begin{aligned} \forall t \in]-R, +R[\,, \bullet\ f'(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n t^{n-1} \qquad \text{(on dérive terme à terme)} \\ \bullet\ f''(t) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n t^{n-2} \\ \ldots \text{etc} \ldots & \\ \bullet\ F(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} t^{n+1} \qquad \text{(on primitive terme à terme)} \\ \bullet\ F'(t) &= f(t) \\ \ldots \text{etc} \ldots & \end{aligned}$$

Des techniques particulières permettent de calculer R à partir de la suite des coefficients $(c_n)_n$ de la série entière.

• Dans l'autre sens, une fonction f est dite développable en série entière sur $]-R, +R[$ (où $R > 0$) lorsqu'il existe une suite $(c_n)_n$ de réels telle que

$$\forall t \in]-R, +R[\,, f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n.$$

Une point essentiel est que, contrairement à d'autres développements en séries (de FOURIER, par exemple), *le développement en série entière d'une fonction est unique.*
Ainsi,

$$\left(\forall t \in]-R+R[\,, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n = 0\right) \Longrightarrow (c_n = 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N})\,,$$

implication dont il est fait grand usage dans le § 2.2.3.
Les relations entre les coefficients c_n et les dérivées d'ordre n de f en 0 sont les mêmes que pour les fonctions polynomiales :

$$c_0 = f(0), \quad c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

• Les fonctions usuelles rencontrées par le lecteur-étudiant sont développables en séries entières, avec des rayons de convergence R connus. Par exemple :

$$e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}, \quad R = +\infty;$$
$$\sin t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad R = +\infty;$$
$$\arctan t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}, \quad R = 1.$$

Aide à la mémorisation : la forme des développements en séries entières (des fonctions usuelles) est comme celle de leurs développements limités de TAYLOR-MACLAURIN, sauf qu'il s'agit de développements... illimités.

Chapitre 4

Équations différentielles linéaires vectorielles (ou systèmes différentiels linéaires) du premier ordre à coefficients constants

A la différence des chapitres précédents, ce chapitre considère les équations différentielles vectorielles (ou systèmes différentiels) ; c'est le premier du genre. Les équations différentielles vectorielles seront toujours du premier ordre, ce qui, nous le verrons, n'est pas une perte de généralité. En revanche, il s'agira d'équations différentielles à coefficients constants, ce qui rend la vie plus facile qu'aux chapitres 2 et 3, et nous rapproche du chapitre 1. D'ailleurs, ce chapitre 4 peut être considéré comme le « cousin vectoriel » du chapitre 1.
Il sera fait appel dans ce chapitre à des notions et des résultats issus de l'Algèbre linéaire ou Calcul matriciel, entre autres :

- Les notions de valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice
- Le polynôme caractéristique d'une matrice
- Le théorème de Cayley-Hamilton
- Des rudiments sur la diagonalisation ou la trigonalisation d'une matrice.

Sommaire

4.1 Etude et résolution de $(\mathrm{EDL})_0$ **94**
4.2 Résolution de l'équation différentielle complète (EDL) **119**
4.3 Final sur les équations différentielles scalaires d'ordre n **(complètes) à coefficients constants** **121**
Annexe 1 – Complément **122**
Annexe 2 – Complément **123**

Nous avons étudié au chapitre 1 les équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre à coefficients constants

$$x'(t) = ax(t) + b(t)$$

(nous avons changé ici la notation de la fonction inconnue, de y à x). C'est la généralisation au cas *vectoriel* qui est l'objet de ce chapitre. Nous restons dans le monde linéaire et les coefficients en jeu sont constants. Les fonctions inconnues étant à valeurs vectorielles, et non plus scalaires, nous utiliserons la notation $t \longmapsto X(t)$ (plutôt que $t \longmapsto x(t)$). Exemple de question considérée : trouver les fonctions $t \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 3y(t) + \cos t \\ y'(t) = -x(t) + 4y(t) + e^t. \end{cases} \tag{4.1}$$

S'il n'y avait eu que $x(t)$ et $x'(t)$ apparaissant dans la première équation de (4.1), on l'aurait résolue avec les techniques présentées au chapitre 1 ; de même s'il n'y avait eu que $y(t)$ et $y'(t)$ apparaissant dans la deuxième équation de (4.1). Or, $x(t)$ et $y(t)$ se mélangent dans les deux équations différentielles (scalaires) de (4.1) ; c'est cela qui fait la difficulté du problème. On peut écrire (4.1) sous la forme matricielle que voici :

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

De manière générale, les équations différentielles étudiées dans ce chapitre se présentent sous la forme (matricielle) suivante :

$$\boxed{X'(t) = AX(t) + b(t),} \tag{EDL}$$

où A est une matrice carrée n par n à coefficients réels, $b : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction (vectorielle) *continue* sur *l'intervalle ouvert* I de $\mathbb{R}$, et $X : t \longmapsto X(t) \in \mathbb{R}^n$ est la fonction (vectorielle) inconnue. (EDL) est une écriture ramassée de la forme plus détaillée suivante (n équations différentielles linéaires scalaires, mais non « indépendantes ») :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + b_n(t). \end{cases}$$

Pour récupérer l'écriture (EDL), on pose

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}.$$

Il ne faut pas se laisser intimider par la taille de ce système, indiqué par l'entier n... Si vous comprenez bien ce qui se passe et comment faire lorsque $n = 2$ ou $n = 3$, ce sera parfait !

Comme on s'y attend, et selon une procédure déjà bien rodée dans les chapitres précédents, il faudra, pour résoudre (EDL), en passer par la résolution de l'équation différentielle linéaire *homogène* (ou sans second membre) associée à (EDL), à savoir

$$X'(t) = AX(t). \qquad (\text{EDL})_0$$

Ensuite,

$$\{\text{solutions de (EDL)}\} = \{\text{solutions de (EDL)}_0\} + \text{une solution « particulière » de (EDL).}$$

Encore faut-il s'assurer *qu'il y a* des solutions de $(\text{EDL})_0$ comme de (EDL). De ce point de vue, la vie sera facilitée par le fait que la matrice A est à coefficients constants (c'est-à-dire ne dépendant pas de t). Notre méthodologie, dans son état d'esprit, sera donc plus proche de celle développée au chapitre 1 que celles des chapitres 2 et 3.

4.1 Etude et résolution de $(\text{EDL})_0$

Dans le cas scalaire (c'est-à-dire lorsque $n = 1$), la résolution de l'équation différentielle

$$x'(t) = ax(t), \quad \text{où } a \in \mathbb{R},$$

a conduit aux fonctions $t \in \mathbb{R} \longmapsto x(t) = Ce^{at}$, où $C \in \mathbb{R}$. C'est d'ailleurs une des manières d'introduire la fonction exponentielle en classes de Terminale des lycées : la fonction $t \in \mathbb{R} \longmapsto x(t) = e^{at}$ est *la* solution du problème de Cauchy suivant :

$$(\mathscr{C}) \begin{cases} x'(t) = ax(t) \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Nous allons opérer de même dans le cas vectoriel (c'est-à-dire lorsque $n \geq 2$), en définissant et étudiant *l'exponentielle d'une matrice* A.
Ce qui suit, le § 4.1.1, relève de l'algèbre linéaire ou du calcul matriciel. Nous présentons néanmoins tout le matériel nécessaire pour la résolution de $(\text{EDL})_0$, laquelle se fera au § 4.1.2.

4.1.1 L'exponentielle d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire une matrice carrée n par n à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Même si A est à coefficients réels, il peut être utile de la considérer comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, quitte à revenir aux aspects réels ultérieurement. Comme le disait le mathématicien J.Hadamard : *« Le plus court chemin entre deux vérités dans le domaine réel passe parfois par le domaine complexe »*.

4.1.1.1 La définition de l'exponentielle de A

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est structuré « topologiquement » (c'est-à-dire on donne un sens aux convergences, à la notion de voisinage, entre autres) à l'aide d'une norme $|||.|||$. Comme

toutes les normes sont équivalentes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on en choisit une qui nous facilite les calculs (de majoration), vérifiant

$$|||AB||| \leq |||A|||.|||B|||. \tag{4.2}$$

Un exemple de telle norme est fourni par

$$A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longmapsto |||A||| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}.$$

Une conséquence de (4.2), très utile par la suite, est la majoration de la norme de A^k (rappelons que A^k signifie $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}$, que A^0 est la matrice identité I_n) :

$$|||A^k||| \leq (|||A|||)^k. \tag{4.3}$$

Outre cette majoration, les deux propriétés essentielles de la norme $|||.|||$ sont :

$$\begin{array}{l} |||A+B||| \leq |||A||| + |||B|||, \\ |||\alpha A||| = |\alpha| \; |||A||| \quad \text{pour } \alpha \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}. \end{array}$$

Définition 4.1.1 La série de matrices de terme général $\dfrac{A^k}{k!}$ est convergente dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (et même « normalement convergente », au sens où la série numérique des normes, de terme général $u_k = |||\dfrac{A^k}{k!}|||$, est convergente). La somme de la série est notée e^A ou bien $\exp(A)$, c'est ce qu'on appelle *l'exponentielle de A*.

Explicitation :

$$I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^k}{k!} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \text{ quelque chose,}$$

lequel est noté $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} (= e^A \text{ ou } \exp(A))$ et appelé l'exponentielle de (la matrice) A.

e^A est à son tour une matrice, du même format que A. Evidemment, e^A est à coefficients réels si A est à coefficients réels.

Justification de la définition : On a : $|||\dfrac{A^k}{k!}||| \leq \dfrac{(|||A|||)^k}{k!}$ pour tout entier k. Puisque la série numérique, à termes ≥ 0, de terme général $u_k = \dfrac{(|||A|||)^k}{k!}$ est convergente (sa somme est $e^{|||A|||}$), on en déduit que la série des normes, de terme général $|||\dfrac{A^k}{k!}|||$, est convergente. Cela induit, parce que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), |||.|||)$ est un espace vectoriel normé *complet* (qu'es aco ?) la convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la série (de matrices) de terme général $\dfrac{A^k}{k!}$.

Premiers exemples

- Si A est la matrice nulle 0, son exponentielle est la matrice identité I_n,

$$e^0 = I_n.$$

- Si $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$e^{\alpha I_n} = e^{\alpha} I_n.$$

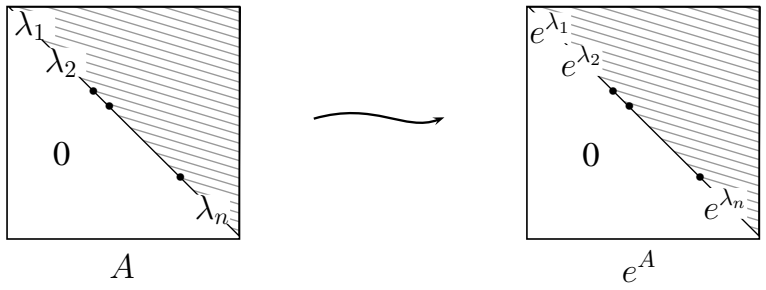
Plus généralement, si A est une matrice diagonale, $A = \text{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, son exponentielle est encore diagonale, avec $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}$ sur la diagonale :

$$e^{\text{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)} = \text{diag}\left(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}\right). \tag{4.4}$$

Cela est facile à voir du fait que $A^k = \text{diag}\left(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k\right)$ pour tout entier k et, rappelons-le,

$$1 + \lambda_i + \frac{\lambda_i^2}{2!} + \cdots + \frac{\lambda_i^k}{k!} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\lambda_i}.$$

- Si A est triangulaire (mettons supérieure) avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ sur la diagonale, alors e^A est encore triangulaire supérieure, avec $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}$ sur la diagonale. Cela est dû au fait que la propriété d'être triangulaire (pour A) est préservée pour A^k, et que la diagonale de A^k est constituée de $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$.



A $\qquad$ e^A

- Un travail similaire à celui qui a servi à démontrer que $e^z = \lim_{k\to+\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^k$ pour tout nombre complexe z conduit à

$$e^A = \lim_{k\to+\infty} \left(I_n + \frac{A}{k}\right)^k. \tag{4.5}$$

4.1.1.2 Propriétés de l'exponentielle d'une matrice

Proposition 4.1.2 Soit P inversible et $B = P^{-1}AP$. Alors

$$e^B = P^{-1} e^A P \tag{4.6}$$

(bref, « l'exponentielle passe à travers »).

Démonstration : On constate que :

$$\begin{aligned} B^2 &= \left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right) = P^{-1}A^2P, \\ B^3 &= \left(P^{-1}A^2P\right)\left(P^{-1}AP\right) = P^{-1}A^3P, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Bref, une démonstration par récurrence sur k aisée conduit à :

$$B^k = \left(P^{-1}AP\right)^k = P^{-1}A^kP \quad \text{pour tout entier } k$$

(bref, « le passage à la puissance passe à travers »). En conséquence,

$$e^B := \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{P^{-1}A^kP}{k!}\right) = \lim_{N\to+\infty}P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{A^k}{k!}\right)P. \tag{4.7}$$

Mais – et c'est un point essentiel – l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M &\longmapsto P^{-1}MP \end{aligned}$$

est *continue*. Ainsi,

$$\begin{aligned} \lim_{N\to+\infty}P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{A^k}{k!}\right)P &= P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^k}{k!}\right)P \\ &= P^{-1}e^AP. \qquad \square \end{aligned}$$

Proposition 4.1.3 (**Propriété fondamentale** de l'exponentielle de matrices)
Si A et B sont deux matrices *qui commutent* (c'est-à-dire si $AB = BA$) et si t est un nombre réel, alors

$$e^{tA}e^{tB} = e^{tB}e^{tA} = e^{t(A+B)}. \tag{4.8}$$

La démonstration n'est pas très compliquée, un peu fastidieuse néanmoins ; on peut la trouver dans la plupart des ouvrages traitant du sujet, [G] et [C] par exemple.
Toutes les autres propriétés de l'exponentielle de matrices vont maintenant découler de la propriété fondamentale explicitée à la Proposition 4.1.3. Notons que cette Proposition 4.1.3 ne dit pas plus (mais pas moins non plus) que ceci :

Si U et V sont deux matrices qui commutent, alors $e^Ue^V = e^{U+V}$. (4.9)

Proposition 4.1.4

- Si t_1 et t_2 sont des nombres réels, $e^{(t_1+t_2)A} = e^{t_1A}e^{t_2A}$ (4.10)
- e^A est toujours inversible, et $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$. (4.11)

- L'application

$$\begin{aligned}\theta : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ t &\longmapsto \theta(t) = e^{tA}\end{aligned}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\theta'(t) := \lim_{h\to 0} \frac{\theta(t+h)-\theta(t)}{h} = Ae^{tA} = e^{tA}A. \tag{4.12}$$

Démonstration :

- Les matrices t_1A et t_2A commutent forcément, et comme $t_1A + t_2A = (t_1+t_2)A$, le résultat (4.10) suit de (4.9).
- Les matrices A et $-A$ commutent, de sorte que

$$e^{-A}e^{A} = e^{A}e^{-A} = e^{0} = I_n,$$

d'où le résultat de (4.11).

- Considérons le quotient différentiel

$$\frac{\theta(t+h)-\theta(t)}{h} = \frac{e^{(t+h)A}-e^{tA}}{h} = \frac{e^{hA}-I_n}{h}e^{tA} = e^{tA}\frac{e^{hA}-I_n}{h}.$$

Il nous faut montrer que $\dfrac{e^{hA}-I_n}{h} \longrightarrow A$ (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) quand $h \longrightarrow 0$. Allons-y.
Observons que

$$e^{hA} = I_n + hA + \frac{h^2A^2}{2!} + \cdots + \frac{h^kA^k}{k!} + \ldots \text{ (h est un scalaire !)};$$

$$\frac{e^{hA}-I_n}{h} - A = \frac{hA^2}{2!} + \cdots + \frac{h^{k-1}A^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{h^{k-1}}{k!}A^k.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}|||\frac{e^{hA}-I_n}{h} - A||| = |||\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{h^{k-1}}{k!}A^k||| &\leq \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{|h|^{k-1}}{k!}|||A^k||| \quad \text{(on voit pourquoi ?)} \\ &\leq \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{|h|^{k-1}}{k!}\left(|||A|||\right)^k \quad (\text{car } |||A^k||| \leq (|||A|||)^k).\end{aligned}$$

Or cette dernière expression n'est autre que

$$\frac{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{|h|^k}{k!}\left(|||A|||\right)^k - (1+|h|\,|||A|||)}{|h|} = \frac{e^{|h|\,|||A|||}-1}{|h|} - |||A|||.$$

Or $\dfrac{e^{rh-1}}{h} \longrightarrow r$ quand $h \longrightarrow 0$ (c'est le résultat de la dérivation de la fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{rx}$ au point 0). Donc,

$$\frac{e^{|h|\,|||A|||}-1}{|h|} \longrightarrow |||A||| \quad \text{quand}\, h \longrightarrow 0.$$

D'où, finalement,

$$|||\frac{e^{hA}-I_n}{h} - A||| \quad \text{est majoré par une quantité qui tend vers 0 quand } h \longrightarrow 0\,;$$

$$\frac{e^{hA}-I_n}{h} - A \longrightarrow 0 \quad \text{quand}\, h \longrightarrow 0. \qquad \square$$

4.1.2 Techniques basiques de calcul de e^A

Disons tout de suite que le calcul explicite de e^A, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, peut être laborieux même lorsque $n = 3$ ou $n = 4$. Les formules de base comme celle de la Définition 4.1.1 ou (4.5) permettent, comme nous l'avons vu pour celle de la Définition 4.1.1 au moins, d'établir des *propriétés théoriques de* e^A, mais elles sont lourdes à utiliser lorsque A n'est pas « simple » et donnent lieu à des *instabilités numériques* dans les calculs sur ordinateurs. Le calcul de e^A est fondamental en Automatique, et un calcul robuste de e^A nécessite la mise en œuvre de techniques spécifiques tenant compte au mieux des particularités structurelles de A (matrices creuses, structurées en blocs, etc.). Une bonne référence à ce sujet est l'étude de l'article de revue suivant :
C. Moler and C. Van Loan, *Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty five years later*, SIAM Review Vol.45, N°1, pp. 1-46 (2003).
Pour le moment, c'est la résolution de $X'(t) = AX(t)$ qui nous préoccupe, nous allons donc nous en tenir aux techniques issues de l'algèbre linéaire ou du calcul matriciel (niveau Bac+1 ou Bac+2)... c'est donc le moment pour le lecteur-étudiant de cliquer sur le fichier « algèbre linéaire » de son cerveau-ordinateur...

• Calcul de e^A en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton.
On voit que, de par la définition même (*cf.* Définition 4.1.1), le calcul de e^A sera facilité si on sait obtenir une expression commodément utilisable de A^k. Le théorème dit de Cayley-Hamilton est une aide dans cette direction. Rappelons ce résultat. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P_A(\lambda)$ son polynôme caractéristique, c'est-à-dire $P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$. Le théorème de Cayley-Hamilton affirme que $P_A(A) = 0$ (c'est-à-dire, si on met la matrice A à la place de la variable réelle λ, la matrice résultante $P_A(A)$ est la matrice nulle). Voyons sur un exemple comment exploiter ce résultat pour calculer e^A. Soit

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Le polynôme caractéristique P_A de A est $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = (2-\lambda)(4-\lambda)^2$.
D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $P_A(A)$ est la matrice nulle, d'où

$$(A - 2I_3)(A - 4I_3)^2 = 0.$$

En posant $B = A - 4I_3$, on a $B^2(B + 2I_3) = 0$, soit $B^3 = -2B^2$. Un raisonnement par récurrence simple conduit à :

$$B^k = (-2)^{k-2}B^2 \quad \text{pour tout entier } k \geq 2.$$

Le calcul de e^{tB} devient du coup facile :

$$\begin{aligned} e^{tB} &= I_3 + tB + \sum_{k=2}^{+\infty} t^k (-2)^{k-2} \frac{B^2}{k!} \\ &= I_3 + tB + \frac{1}{4}(e^{-2t} - 1 + 2t)B^2. \end{aligned}$$

Comme les matrices B et I_3 commutent,

$$e^{tA} = e^{4t}e^{tB} = e^{4t}I_3 + te^{4t}B + \frac{1}{4}(e^{2t} - e^{4t} + 2t)e^{4t}B^2.$$

Il n'y a plus qu'à remplacer B (resp. B^2) par son expression en fonction de A, $B = A - 4I_3$.
Pour d'autres exemples du même type, voir les exercices du chapitre 3 de l'excellent ouvrage, par d'excellents auteurs, que voici :
J.-B. Hiriart-Urruty et Y.Plusquellec, *Exercices d'algèbre linéaire et bilinéaire*, Cepadues-Editions, Toulouse (1988) [publicité gratuite !]

• **Calcul de e^A lorsque A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.**
Il faut ici se remémorer le résultat de la Proposition 4.1.2. Soit donc A une matrice diagonalisable : il existe une matrice inversible P telle que

$$P^{-1}AP = \underbrace{\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)}_{:=D.}$$

Alors, $A = PDP^{-1}$, d'où

$$e^A = Pe^DP^{-1} = P\operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}\right)P^{-1} \tag{4.13}$$

(voir Proposition 4.1.2 et formule (4.4)).
Pour l'application de cette méthode, il nous faut :
- — calculer les valeurs propres λ_i de A et leurs exponentielles ;
- — trouver P diagonalisant A [cela se trouve grâce à des vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_i] ;
- — calculer P^{-1}.

• **Calcul de e^{tA} après trigonalisation (ou triangularisation) de A.**
$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est *toujours* triangularisable (on dit aussi trigonalisable) dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors qu'elle n'est pas toujours diagonalisable. Ainsi, il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible telle que

$$P^{-1}AP = \underbrace{\begin{bmatrix} \bullet & * & * & * \\ 0 & \bullet & * & * \\ \vdots & \ddots & \bullet & * \\ 0 & \ldots & 0 & \bullet \end{bmatrix}}_{=:T}$$

(Ce qui figure sur la diagonale est la liste des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de A.)

La matrice T^k est encore triangulaire supérieure avec $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$ sur la diagonale (coup de chance : le calcul des termes au-dessus de la diagonale n'a pas perturbé les calculs sur la diagonale). D'où e^T est triangulaire supérieure, avec $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}$ sur la diagonale. Ici encore on a

$$e^A = Pe^T P^{-1}. \tag{4.14}$$

Cette technique n'est à utiliser que si le calcul de T^k est commode, car il s'agit malgré tout de déterminer e^T. Il faut aussi trouver une matrice P triangularisant la matrice A donnée.

★ **Illustration de cette technique : le calcul du déterminant de e^A**
La matrice e^A est toujours inversible (*cf.* (4.11) de Proposition 4.1.4), mais que vaut $\det(e^A)$? Euh... $e^{\det A}$? Bien tenté, mais c'est faux. Une idée du résultat est donnée par la situation (4.4) : Si $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\quad e^A = \operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}\right)$, de sorte que

$$\det A = e^{\lambda_1} \times \cdots \times e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}.$$

Grâce au procédé de trigonalisation exposé plus haut (*cf.* (4.14)), $\det A = \det(e^T) = e^{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}$. Comme la somme $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ des valeurs propres est la trace de A, on a ainsi

$$\det(e^A) = e^{trA}. \tag{4.15}$$

★ • **Calcul de e^{tA} en utilisant la décomposition $A = D + N$** (à ne pas confondre avec le test ADN...)
Parmi les décompositions possibles de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il y a celle que voici. Etant donné A, il *existe* un couple (D, N) de matrices (unique d'ailleurs) tel que :

$$\begin{cases} D \text{ est } \textit{diagonalisable}, N \text{ est } \textit{nilpotente} ; \\ \text{D et N commutent} ; \\ A = D + N. \end{cases} \tag{4.16}$$

« N nilpotente » signifie qu'une certaine puissance de N est la matrice nulle : il existe un entier p tel que $N^p = 0$. Elles se reconnaissent au fait que $\lambda = 0$ est leur seule valeur propre. De fait, elles sont semblables à des matrices triangulaires supérieures ne comportant que des 0 sur le diagonale. Par exemple,

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

est nilpotente. Calculer N^2 provoque un décalage des zéros au-dessus de la diagonale,

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Au coup suivant, un nouveau décalage se produit, de sorte que $N^3 = 0$.
Comme D et N commutent dans (4.16), on a $e^A = e^D e^N$. Oui, mais comment faire ?

— Calculer e^D : cela a été vu plus haut, puisque D est diagonalisable.
— Calculer e^N : le calcul est accessible car N est nilpotente. En effet, si p est un entier tel que $N^p = 0$ (de fait, le plus petit entier p pour qu'il en soit ainsi est $\leq n$), on a

$$e^N = I_n + N + \cdots + \frac{N^{p-1}}{(p-1)!}.$$

Nous ne prétendons pas que la décomposition $A = D + N$ de (4.16) est facile à trouver... Dans les exercices proposés, la détermination du couple (D, N) est guidée ; par exemple, D est diagonale et saute aux yeux.

Exemple 4.1.5 Considérons

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Une décomposition immédiate de A est

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{N}.$$

D est diagonalisable puisque... déjà diagonale. N est nilpotente, et $N^2 = 0$. De plus – et c'est la propriété requise la plus importante – D et N commutent. En conséquence :

$$e^D = \operatorname{diag}\left(e^3, e^2, e^2\right),$$

$$e^N = I_3 + N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$e^A = e^D e^N = \begin{bmatrix} e^3 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix}.$$

★ • **Calcul de e^A via une réduction de JORDAN** (non, je vous assure, ce n'est pas le nom d'un joueur de basket-ball ni le prénom du voisin...)
On appelle *bloc* (ou *cellule*) *de JORDAN* toute matrice J_λ de taille $(1,1)$ ($J_\lambda = [\lambda]$, λ nombre réel ou complexe) ou toute matrice carrée J_λ de taille (q,q), avec $q \geq 2$, de la forme

$$J_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

(Scalaire λ sur la diagonale, 1 au-dessus de la diagonale, 0 partout ailleurs)

Résultat (admis) : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé dans l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ (P_A scindé signifie que P_A admet n racines dans $\mathbb{K}$, en comptant chaque racine avec sa multiplicité ; ainsi, P_A peut toujours être scindé dans l'ensemble des polynômes à coefficients complexes, mais pas toujours dans l'ensemble des polynômes à coefficients réels). Alors A est semblable (via $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible) à une matrice diagonale par blocs J, où tous les blocs $J_{\lambda_1}, \ldots, J_{\lambda_p}$ sont des blocs de JORDAN.

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{J_{\lambda_1}} & & & & \\ & \boxed{J_{\lambda_2}} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \boxed{} & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

Quelques précisions : le nombre de blocs J_{λ_i} ayant le même λ_i (valeur propre de A) sur la diagonale est la dimension du sous-espace propre de A associé à λ_i ; la taille maximale des blocs J_{λ_i} ayant le même λ_i sur la diagonale est l'ordre de multiplicité de la racine λ_i du polynôme minimal de A.
Observons que A est diagonalisable si et seulement si les blocs d'une réduite de JORDAN J de A sont tous d'ordre un.

Exemple 4.1.6

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{est semblable à } J = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \end{bmatrix}.$$

Si J_λ est un bloc de JORDAN de taille (m, m), le calcul de e^{J_λ} en est facilité ; en effet

$$J_\lambda = \lambda I_m + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{matrice nilpotente } N \text{ de taille } (m,m)},$$

d'où

$$e^{J_\lambda} = e^{\lambda I_m} e^N = e^\lambda \left(I_m + N + \cdots + \frac{N^{m-1}}{(m-1)!} \right).$$

Ainsi, si on a trouvé une matrice P rendant A semblable à une matrice J comme plus haut, on aura

$$e^A = P \begin{bmatrix} \boxed{e^{J_{\lambda_1}}} & & \\ & \boxed{e^{J_{\lambda_2}}} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Exemple 4.1.7

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alors, avec $J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $J_2 = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$, $J_3 = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$, (vu ?), on arrive à

$$e^A = \begin{bmatrix} e & e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le calcul de e^{tA} via une réduction de JORDAN est, reconnaissons-le, un peu lourd, d'autant qu'il faut *trouver* une telle réduite J de A.
Pour terminer ce § 4.1.2 signalons une dernière méthode de calcul de e^{tA}, la méthode de E.J.PUTZER (1966). L'intérêt de cette méthode réside dans le fait que la simple connaissance des valeurs propres de A et de leurs multiplicités conduit, via la résolution d'une chaîne d'équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre, à une formulation explicite de e^{tA}. Les lecteurs-étudiants curieux sont invités à consulter [C, pp.78-81].

De manière générale, pour le calcul de e^A, toute méthode ou astuce permettant d'*organiser* au mieux les calculs et de les *minimiser* est bonne à prendre... J'ai vu des étudiant-e-s calculer e^{tA} pour $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ par exemple, puis calculer... recalculer... transpirer pour avoir l'inverse $(e^{tA})^{-1}$... alors que ce n'est autre que e^{-tA}... Il faut savoir lever le nez de ses calculs parfois.

4.1.3 Résolution théorique de $(\mathrm{EDL})_0$

Revenons à ce qui est notre objectif principal, celui de résoudre $(\mathrm{EDL})_0$ (théoriquement, du moins pour le moment).

Théorème 4.1.8 Les solutions de

$$X'(t) = AX(t) \qquad (\mathrm{EDL})_0$$

sont toutes de la forme

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto X(t) = e^{tA}v, \qquad (4.17)$$

où $v \in \mathbb{R}^n$.

Autre façon de dire la même chose :

La solution du *problème de* CAUCHY que voici :

$$(\mathscr{C})\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(t_0) = v_0, \end{cases}$$

où $t_0 \in \mathbb{R}$ et $v_0 \in \mathbb{R}^n$ sont donnés, est

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto X(t) = e^{(t-t_0)A}v_0. \tag{4.18}$$

Démonstration : Elle est semblable à celle pour les équations différentielles scalaires (§ 1.3.1 du chapitre 1). Considérons la fonction vectorielle $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$\varphi(t) := e^{-tA}X(t).$$

A l'aide de la formule de dérivation (4.12) de la Proposition 4.1.4 et de celle d'un « produit », on a

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= -Ae^{-tA}X(t) + e^{-tA}X'(t) \\ &= e^{-tA}\left[-AX(t) + X'(t)\right]. \end{aligned}$$

Ainsi, X est solution de (EDL)$_0$ si, et seulement si, $\varphi' \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$. En conséquence, φ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$, $\varphi(t) = v$ ($\in \mathbb{R}^n$) pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui conduit à $X(t) = e^{tA}v$.
Pour résoudre le problème de CAUCHY ($\mathscr{C}$), il suffit « d'ajuster » $X(\cdot)$ solution générale de (EDL)$_0$ pour que $X(t_0) = v_0$. Faisons-le (si possible !) :

$$e^{t_0A}v = v_0$$

est résoluble d'une et d'une seule façon, $v = e^{-t_0A}v_0$, d'où l'expression (4.18) de la solution $X(t)$. □

Remarques :

— On notera qu'ici, pour (EDL)$_0$, l'existence et l'unicité des solutions du problème de CAUCHY ($\mathscr{C}$) est obtenue *directement*, sans aucun recours à un théorème d'existence et d'unicité dans un problème de CAUCHY linéaire général (comme ce fut le cas au § 3.1.1 du chapitre 3). Avoir des coefficients constants, ça simplifie la vie !

— Au vu du résultat du Théorème 4.1.8, il est clair que l'ensemble $\mathcal{V}$ des solutions de (EDL)$_0$ est *un espace vectoriel* (un sous-espace vectoriel de $E = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ou même de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$) *de dimension* n. Voyons cela rapidement. Soit en effet une base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ de $\mathbb{R}^n$. Un vecteur v quelconque de $\mathbb{R}^n$ se décompose (de manière unique) en

$$v = \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{e_n},$$

avec des coefficients réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Alors, si $X \in \mathcal{V}$ (c'est-à-dire si X est une solution de (EDL)$_0$), on a

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto X(t) = \alpha_1\left(e^{tA}\overrightarrow{e_1}\right) + \alpha_2\left(e^{tA}\overrightarrow{e_2}\right) + \cdots + \alpha_n\left(e^{tA}\overrightarrow{e_n}\right),$$

et les n fonctions (vectorielles) $t \in \mathbb{R} \longmapsto X^i(t) := e^{tA}\overrightarrow{e_i}$ sont linéairement indépendantes (on est d'accord ?).
Comme dans le contexte du chapitre 3 (§ 3.1.2), toute base $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ de $\mathcal{V}$, c'est-à-dire tout ensemble de n solutions linéairement indépendantes de $(\mathrm{EDL})_0$, est appelée *système fondamental de solutions de* $(\mathrm{EDL})_0$. Toujours selon la manière de faire développée au chapitre 3 (§ 3.1.3), le *test d'indépendance linéaire* de n solutions $X^1, X^2, \ldots, X^n$ de $(\mathrm{EDL})_0$ est très simple : les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $X^1, X^2, \ldots, X^n$ sont des solutions linéairement indépendantes de $(\mathrm{EDL})_0$, et on en déduit que $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ constitue un système fondamental de solutions de $(\mathrm{EDL})_0$.

(ii) Il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ (par exemple $t_0 = 0$) tels que les *vecteurs* $X^1(t_0), X^2(t_0), \ldots, X^n(t_0)$ de $\mathbb{R}^n$ soient linéairement indépendants.

(iii) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, les vecteurs $X^1(t), X^2(t), \ldots, X^n(t)$ de $\mathbb{R}^n$ sont linéairement indépendants.

4.1.4 Méthodes pratiques de résolution de $(\mathrm{EDL})_0$

Le résultat du Théorème 4.1.8 est théorique... ; pour résoudre $(\mathrm{EDL})_0$ il ne s'agit pas de foncer tête baissée dans le calcul de e^{tA} (dont on a dit qu'il n'était pas toujours facile ; *cf.* § 4.1.2) . Bien sûr, si on connaît $e^{\tau A}$, $\tau \in \mathbb{R}$, on résout tout problème de Cauchy qui va avec $(\mathrm{EDL})_0$, voir (4.18).
Nous allons présenter ci-dessous des méthodes pratiques de résolution (directe) de $(\mathrm{EDL})_0$; si l'on sait faire ça, on obtient $e^{\tau A}$, $\tau \in \mathbb{R}$, comme sous-produit du calcul ! Par exemple, résoudre le problème de Cauchy

$$(\mathscr{C}) \begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

conduit à la solution $t \in \mathbb{R} \longmapsto X(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire au premier vecteur-colonne de la matrice e^{tA}.
Il faut donc aussi se souvenir de l'utilisation dans ce sens du Théorème 4.1.8. Rappelons notre objectif dans ce paragraphe :

Il nous faut trouver

$$n \text{ fonctions } X^i : t \in \mathbb{R} \longmapsto X^i(t) \text{ solutions de } (\mathrm{EDL})_0 \tag{4.19}$$

et s'assurer que

$$\text{les } n \text{ solutions exhibées sont } \textit{linéairement indépendantes}, \tag{4.20}$$

par exemple en constatant que les n vecteurs $X^1(t_0), X^2(t_0), \ldots, X^n(t_0)$ sont linéairement indépendants.

Même si A est à coefficients réels, et que les solutions à trouver sont réelles, il est utile de considérer A comme une matrice à coefficients complexes et de rechercher les solutions complexes de

$$Z'(t) = AZ(t). \tag{EDL_0^*}$$

En clair, on cherche des fonctions $Z^i : t \in \mathbb{R} \longmapsto Z^i(t) \in \mathbb{C}^n$ (des fonctions à valeurs complexes donc) vérifiant $Z'(t) = AZ(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$; on reviendra « sur terre », c'est-à-dire aux solutions réelles, ensuite.
Quelles sont les raisons de ce détour ?

- La matrice A, considérée comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (contenant $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), est toujours plus facilement réductible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; la diagonalisation ou la trigonalisation en sont des exemples (nous avons déjà évoqué cela dans ce chapitre).
- L'obtention d'un système fondamental de solutions (complexes a priori) de $(\mathrm{EDL})_0^*$ conduira facilement à un système fondamental de solutions (réelles) de $(\mathrm{EDL})_0$. Observons tout de suite que si $t \in \mathbb{R} \longmapsto Z(t)$ est une solution de $(\mathrm{EDL})_0^*$, il en est de même de $t \in \mathbb{R} \longmapsto \overline{Z}(t)$ (on prend les conjuguées de toutes les composantes de cette fonction) ; cela est dû au fait que A est une matrice à coefficients réels (et donc $\overline{A} = A$, c'est-à-dire $\overline{a_{ij}} = a_{ij}$ pour tout coefficient a_{ij} de A).

Ce « passage par $\mathbb{C}$ » n'est pas une nouveauté pour le lecteur-étudiant ; cela s'est déjà produit dans la résolution d'équations (du second degré par exemple), dans la recherche de valeurs propres de la matrice réelle A, etc.
En bref, « un petit tour chez les complexes et on reviendra ensuite vers les réels » [1].
Nous proposons ci-dessous *une méthode pratique systématique de résolution de* $(\mathrm{EDL})_0^*$ (*puis de* $(\mathrm{EDL})_0$) ; ce n'est pas difficile, ça marche à tous les coups (pour les exemples qui vous seront proposés), et pas besoin de s'emberlificoter dans les méandres de « réductions de A » diverses et variées... même si elles sont sous-jacentes.

• **Objectifs ?** Ils sont fixés en (4.19)-(4.20).

• **Idée :** Imaginons des solutions de $(\mathrm{EDL})_0^*$ qui sont de la forme

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto Z(t) = e^{\lambda t} v, \text{où } \lambda \in \mathbb{C} \text{ et } v \in \mathbb{C}^n. \tag{4.21}$$

1. « *Dans les complexes, c'est comme dans la vie, il y a une partie réelle et une partie imaginaire...* », Un collègue.

Comme $Z'(t) = \lambda e^{\lambda t} v$, avoir $Z'(t) = AZ(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ revient à considérer des λ et v vérifiant $Av = \lambda v$. Or les scalaires $\lambda \in \mathbb{C}$ et les vecteurs (non nuls) $v \in \mathbb{C}^n$ tels que $Av = \lambda v$ sont les valeurs propres de A et les dits vecteurs propres de A associés à λ. C'est donc le moment pour le lecteur-étudiant de cliquer sur le fichier « valeurs propres-vecteurs propres » de son cerveau-ordinateur...

• **Techniques :** Commençons piano... par un premier cas de figure simple.

$\boxed{1^{er} cas}$ *Toutes* les valeurs propres de A, c'est-à-dire les n valeurs propres de A (éventuellement complexes) sont *distinctes* : $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.
A la valeur propre λ_k est associé un vecteur propre $v_k \in \mathbb{C}^n$ (le choix de v_k n'est évidemment pas unique). Alors, nous prétendons que les fonctions

$$Z^k : t \in \mathbb{R} \longmapsto Z^k(t) := e^{\lambda_k t} v_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

constituent n solutions linéairement indépendantes de $(\mathrm{EDL})_0^*$. La preuve ?

— Tout d'abord, les Z^k sont bien solutions de $(\mathrm{EDL})_0^*$,

$$\left(Z^k\right)'(t) = \lambda_k e^{\lambda_k t} v_k = \lambda_k Z^k(t), \quad t \in \mathbb{R} ;$$

— $\{Z^1(0) = v_1, Z^2(0) = v_2, \ldots, Z^n(0) = v_n\}$ constitue une base de $\mathbb{C}^n$; la raison est que la matrice A est diagonalisable, de sorte que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ constitue une base (de vecteurs propres) de $\mathbb{C}^n$.

En conséquence, les solutions de $(\mathrm{EDL})_0^*$ sont

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto X(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{\lambda_k t} v_k, \quad \text{où } C_1, C_2, \ldots C_n \in \mathbb{C}. \tag{4.22}$$

Exemple 4.1.9 Résoudre

$$\begin{cases} x'(t) = -2y(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) \end{cases}, \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Ici la matrice A n'a pas de valeur propre réelle, mais seulement deux valeurs propres complexes (forcément) conjuguées : $\lambda = 1 + i$ et $\overline{\lambda} = 1 - i$ (A est considérée comme élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, donc représentant, dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$, un endomorphisme de $\mathbb{C}^2$).
Choisissons $v_1 = (1 + i, -i)$ un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 1 + i$ (c'est-à-dire, v_1 est un vecteur non nul de $\mathbb{C}^2$ vérifiant $Av_1 = \lambda v_1$). Ensuite choisissons $v_2 = (1 - i, i)$ un vecteur propre associé à la valeur propre $\overline{\lambda} = 1 - i$ (nous économisons ici les calculs car, A étant à valeurs réelles, de $Av = \lambda v$ on déduit $A\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$).
D'où deux solutions complexes Z^1 et $Z^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2$ linéairement indépendantes de $(\mathrm{EDL})_0^*$:

$$\begin{aligned} Z^1(t) &= e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 1 + i \\ -i \end{pmatrix}, \\ Z^2(t) &= e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} 1 - i \\ i \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

On aura constaté sur cet exemple que $Z^2(t)$ n'est autre que la forme conjuguée de $Z^1(t)$.

$\boxed{2^{eme}cas}$ Cas général cette fois-ci.
A, considérée comme un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, représente, dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$, un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$. Elle a pour valeurs propres distinctes :

$$\lambda_1 \text{ d'ordre } n_1,\ \lambda_2 \text{ d'ordre } n_2, \ldots,\ \lambda_p \text{ d'ordre } n_p$$

(des nombres réels ou complexes). Cela signifie que le polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$ de A est, au signe près, $(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\ldots(\lambda-\lambda_p)^{n_p}$; comme on a accepté de travailler dans $\mathbb{C}$, $P_A(\lambda)$ a pu être scindé, c'est-à-dire « cassé » en un produit de polynômes du premier degré, $(\lambda-\lambda_k)^{n_k}$.
Des résultats généraux d'Algèbre linéaire affirment alors que :

$$\begin{aligned}
&n_1+n_2+\cdots+n_p=n;\\
&N_k:=\mathrm{Ker}\,(A-\lambda_k I_n)^{n_k} \text{ est de dimension } n_k \text{ (exactement)};\\
&\mathbb{C}^n=N_1\oplus N_2\oplus\cdots\oplus N_p.
\end{aligned}$$

Comme ce sont les facteurs $(\lambda-\lambda_k)^{n_k}$ qui apparaissent dans la décomposition du polynôme caractéristique de A, les sous-espaces vectoriels N_k sont appelés *sous-espaces caractéristiques*. Si $E_k := \mathrm{Ker}\,(A-\lambda_k I_n)$ est le dit sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k, on a seulement l'inclusion $E_k \subset N_k$ (attention, attention !) ... Avoir que les E_k arrivent à « manger » tous les N_k, $k=1,\ldots,p$, est la clé de la diagonalisibilité de A. Puisque N_k est de dimension n_k $(k=1,2,..,p)$, choisissons

$$\{v_{k,1}, v_{k,2}, \ldots, v_{k,n_k}\} \quad \text{une base de } N_k,$$

de sorte qu'en accolant les bases les unes avec les autres

$$\{v_{1,1},\ldots,v_{1,n_1};v_{2,2},\ldots,v_{2,n_2};\ldots;v_{k,p},\ldots,v_{k,n_p}\}$$

on constitue une base de $\mathbb{C}^n$ (cela est dû au fait que $N_1, N_2, \ldots, N_p$ sont telles que $N_1\oplus N_2\oplus\cdots\oplus N_p=\mathbb{C}^n$).
Au vu de cela, on va proposer une famille de n solutions linéairement indépendantes $Z^{k,j}$ de $(\mathrm{EDL})_0^*$, vérifiant $Z^{k,j}(0)=v_{k,j}$ précisément.

Théorème 4.1.10 A $v_{k,j}$ on associe

$$\begin{aligned}
&Z^{k,j}: t\in\mathbb{R}\longmapsto Z^{k,j}(t) \text{ avec}\\
&Z^{k,j}(t):=e^{\lambda_k t}\left[I_n+\frac{t}{1!}(A-\lambda_k I_n)+\cdots+\frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!}(A-\lambda_k I_n)^{n_k-1}\right]v_{k,j}.
\end{aligned}$$

Ainsi, avec la valeur propre λ_k et les n_k vecteurs propres $v_{k,1},\ldots,v_{k,n_k}$, on définit n_k fonctions $Z^{k,1}, Z^{k,2},\ldots,Z^{k,n_k}$. Faisant cela pour $k=1,2,...,p$, on construit au total $n_1+n_2+\cdots+n_p=n$ fonctions vectorielles $Z^{k,j}$ (complexes a priori) de la variable réelle t.
Ces n fonctions sont solutions linéairement indépendantes de $(\mathrm{EDL})_0^*$.

C'est un énoncé qui est plus facile à comprendre qu'à écrire... Dans l'expression proposée de $Z^{k,j}(t)$, on comprend pourquoi on s'est arrêté à la puissance n_k-1 de $(A-\lambda_k I_n)$, non ?

En effet, dès le coup suivant, $(A-\lambda_k I_n)^{n_k} v_{k,j} = 0$ car $v_{k,j} \in N_k = \mathrm{Ker}\,(A-\lambda_k I_n)^{n_k}$...
Observons que $Z^{k,j}(t) = e^{\lambda_k t} P_k(t)$, où $P_k(t)$ est une expression polynomiale en t, à coefficients complexes, et de degré au plus $n_k - 1$. Sachant cela, on peut aussi partir de là, substituer ces expressions dans les équations différentielles à résoudre, et obtenir ainsi un ensemble d'équations permettant de déterminer ceux des coefficients des P_k qui ne peuvent demeurer arbitraires.

Démonstration : Commençons par montrer que $Z^{k,j}$ est effectivement solution de $(\mathrm{EDL})_0^*$. Pour cela, observons la propriété suivante :

$$(A-\lambda_k I_n)\, Z^{k,j}(t) = e^{\lambda_k t}\left[(A-\lambda_k I_n) + \frac{t}{1!}(A-\lambda_k I_n)^2 + \cdots + \frac{t^{n_k-2}}{(n_k-2)!}(A-\lambda_k I_n)^{n_k-1}\right] v_{k,j}. \tag{4.24}$$

(on provoque un décalage sur les puissances de $(A-\lambda_k I_n)$, et on tient compte du fait que $(A-\lambda_k I_n)^{n_k} v_{k,j} = 0$). Par ailleurs,

$$(Z^{k,j})'(t) = \lambda_k Z^{k,j}(t) + e^{\lambda_k t}\left[(A-\lambda_k I_n) + \cdots + \frac{t^{n_k-2}}{(n_k-2)!}(A-\lambda_k I_n)^{n_k-1}\right] v_{k,j}. \tag{4.25}$$

D'où, en comparant les deux expressions (4.24) et (4.25), $(Z^{k,j})'(t) = AZ^{k,j}(t)$. Les n fonctions $Z^{k,j}$ sont bien solutions de $(\mathrm{EDL})_0^*$.
Comme $\{Z^{k,j}(0) = v_{k,j}\}_{\substack{k=1,\dots,p \\ j=1,\dots,n_k}}$ constitue une base de $\mathbb{C}^n$, le tour est joué, les solutions exhibées sont linéairement indépendantes. □

Exemple 4.1.11 Soit à résoudre

$$x' = 2x + y, \quad y' = y + z, \quad z' = y + z \quad (\text{sous-entendu}, x'(t) = ..., \text{etc.}),$$

soit encore, sous écriture matricielle

$$X' = AX, \quad \text{avec } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.26}$$

Le polynôme caractéristique de A est $P_A(\lambda) = -\lambda(\lambda-2)^2$.

- Considérons $\lambda_1 = 0$. Alors, $N_1 = \mathrm{Ker}\,(A - 0I_3)$ est de dimension 1 ; un seul vecteur non nul de N_1, par exemple $v_1 = \left(\frac{1}{2}, -1, 1\right)$ suffit à constituer une base de N_1.
- Considérons $\lambda_2 = 2$. Il nous faut déterminer $N_2 = \mathrm{Ker}\,(A-2I_3)^2$. Après (quelques) calculs, on arrive à la description suivante :

$$(\alpha, \beta, \gamma) \in N_2 \Longleftrightarrow \beta = \gamma.$$

  Ainsi, $\{v_2 = (1,0,0), v_3 = (0,1,1)$ constitue une base de N_2.

Avec ces trois vecteurs (v_1, v_2, v_3) et les valeurs λ_1 et λ_2, nous allons proposer trois solutions linéairement indépendantes de (4.26).
A v_1 et λ_1 est associée la solution

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto Z^1(t) = e^{\lambda_1 t} v_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A v_2 et λ_2 correspond la solution

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto Z^2(t) = e^{2t}\left[I_3 + \frac{t}{1!}(A - 2I_3)\right] v_2 = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Avec v_3 et λ_2 on construit la solution

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto Z^3(t) = e^{2t}\left[I_3 + \frac{t}{1!}(A - 2I_3)\right] v_3 = \begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

In fine, toutes les solutions (complexes) de (4.26) sont :

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto C_1 \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \text{ et } C_3 \in \mathbb{C}.$$

Du coup on a aussi les solutions réelles : il suffit de prendre C_1, C_2 et C_3 dans $\mathbb{R}$.

Et les solutions réelles dans tout ça ? ou comment obtenir les solutions de (EDL)$_0$ à partir de celles de (EDL)$_0^*$?
Puisque A est à valeurs *réelles* on cherche (évidemment) uniquement les *solutions réelles* de $X' = AX$. On rappelle à propos de A considéré comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ les résultats suivants :

- Les valeurs propres non réelles de A sont (complexes) conjuguées deux à deux, avec les mêmes multiplicités : si $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ (avec $\beta_k \neq 0$) est valeur propre de A, il en est de même de $\overline{\lambda_k} = \alpha_k - i\beta_k$.
- Le calcul des vecteurs propres (dans $\mathbb{C}^n$) associés à λ_k (complexe non réel) et $\overline{\lambda_k}$ est simplifié par le fait (déjà observé) suivant :

  $$(Av_k = \lambda_k v_k) \Longleftrightarrow \left(A\overline{v_k} = \overline{\lambda_k}\overline{v_k}\right),$$

  où $\overline{v_k}$ désigne, bien entendu, le vecteur (de $\mathbb{C}^n$) dont les composantes sont les conjuguées de celles de v_k.

D'une manière claire :

$$\left(\begin{array}{l} t \in \mathbb{R} \longmapsto Z(t)\ (\in \mathbb{C}^n) \\ \text{est solution (complexe) de} \\ X' = AX \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{l} t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{Re}Z(t)\,(\in \mathbb{R}^n) \\ et \\ t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{Im}Z(t)\,(\in \mathbb{R}^n) \text{ sont} \\ \text{solutions réelles de } X' = AX. \end{array}\right), \tag{4.27}$$

où $\mathrm{Re}Z(t)$ (resp. $\mathrm{Im}Z(t)$) désigne le vecteur de composantes les parties réelles (resp. les parties imaginaires) de $Z(t)$. Ceci est facile à vérifier puisque

$$\begin{aligned} (\mathrm{Re}Z + i\mathrm{Im}Z)'(t) &= (\mathrm{Re}Z)'(t) + i\,(\mathrm{Im}Z)'(t) = \mathrm{Re}Z'(t) + i\mathrm{Im}Z'(t), \\ A\left[\mathrm{Re}Z(t) + i\mathrm{Im}Z(t)\right] &= A\,(\mathrm{Re}Z)(t) + iA\,(\mathrm{Im}Z)(t). \end{aligned}$$

Pour obtenir les solutions réelles de $X' = AX$ à partir de celles complexes (toujours de $X' = AX$), on opère comme ceci :

- Si λ_k est une valeur propre *réelle* de A, de multiplicité n_k : on choisit $v_{k,1},\dots,v_{k,n_k}$ (vecteurs de $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$) dans $N_k = \operatorname{Ker}(A-\lambda_k I_n)^{n_k}$ et on propose n_k solutions $Z^{k,j}$ comme indiqué en p. 109 (du coup ces $Z^{k,j}$ sont des solutions réelles).
- Si λ_k est une valeur propre *complexe* de A, de multiplicité n_k : à la famille des $2n_k$ solutions complexes $Z^{k,1},\dots,Z^{k,n_k},\overline{Z^{k,1}},\dots,\overline{Z^{k,n_k}}$ on substitue les $2n_k$ *solutions réelles* :

$$\mathrm{Re}Z^{k,1},\dots,\mathrm{Re}Z^{k,n_k},\mathrm{Im}Z^{k,1},\dots,\mathrm{Im}Z^{k,n_k}.$$

En procédant ainsi pour $k=1,2,\dots,p$, on obtient *une famille de n solutions réelles linéairement indépendantes* de $X'=AX$. C'était l'objectif recherché.

Exemple 4.1.12 (Exemple 4.1.9 revisité)
Les deux solutions complexes conjuguées Z^1 et $Z^2=\overline{Z^1}$ donnent naissance aux deux solutions réelles qui sont

$$\begin{aligned} X^1 &= \underset{(=\mathrm{Re}Z^2)}{\mathrm{Re}Z^1} : t\in\mathbb{R}\longmapsto e^t\begin{pmatrix}-\sin t+\cos t\\ \sin t\end{pmatrix},\\ X^2 &= \underset{(=-\mathrm{Im}Z^2)}{\mathrm{Im}Z^1} : t\in\mathbb{R}\longmapsto e^t\begin{pmatrix}\cos t+\sin t\\ -\cos t\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.28}$$

La forme générale des solutions de $(\mathrm{EDL})_0$ dans l'Exemple 4.1.9 est donc :

$$t\in\mathbb{R}\longmapsto X(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(C_1+C_2)\,e^t\cos t+(C_2-C_1)\,e^t\sin t\\ -C_2e^t\cos t+C_1e^t\sin t\end{pmatrix},$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.

Exemple 4.1.13 ou l'utilisation du Théorème 4.1.8 dans le sens inverse.
Soit $A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ et on veut calculer e^A. Le calcul direct via la Définition 4.1.1 n'est pas difficile ici (car $A^2=-I_2$), mais on va procéder autrement. Considérons le système différentiel

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\quad \text{soit}\ \begin{cases}x'=y\\ y'=-x\end{cases}; \tag{4.29}$$

ceci n'est autre que la forme « déployée » de $x''=-x$ (on est d'accord ?).
Le problème de Cauchy

$$\begin{cases}x''+x=0\\ x(0)=a, x'(0)=b\end{cases}$$

a pour solution $t\in\mathbb{R}\longmapsto x(t)=a\cos t+b\sin t$. Formulé autrement,

$$t\in\mathbb{R}\longmapsto X(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)=x'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cos t+b\sin t,\\ -a\sin t+b\cos t\end{pmatrix}$$

est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases}X'(t)=AX(t)\\ X(0)=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\end{cases},$$

dont on connaît une autre expression de la solution, à savoir

$$X(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

Ceci est une matrice de rotation dans le plan $\mathbb{R}^2$, et son expression explicite au-dessus est l'occasion pour le lecteur-étudiant d'illustrer toutes les propriétés de l'exponentielle d'une matrice (§ 4.1.1.2).

4.1.5 Détermination explicite de e^{tA} lorsque $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Avant de passer au dernier paragraphe de cette Section 4.1, offrons-nous une friandise, celle de calculer de e^{tA} lorsque A est une matrice réelle $(2,2)$, et ce dans tous les cas de figure.
Si $P_A(\lambda)$ est le polynôme caractéristique de A, il y a exactement trois possibilités en ce qui concerne ses racines (et donc les valeurs propres de A) :

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2), \quad \text{avec } \lambda_1 \text{ et} \lambda_2 \text{ réels}, \lambda_1 \neq \lambda_2; \tag{4.30}$$

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^2, \quad \text{avec } \lambda_0 \text{ réel}\ ; \tag{4.31}$$

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2), \quad \begin{array}{l} \text{avec } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ complexes conjugués,} \\ \lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta, \alpha \text{ et } \beta \text{ réels}, \beta \neq 0. \end{array} \tag{4.32}$$

Théorème 4.1.14 Pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons

(i) Dans le cas (4.30),

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{\lambda_1 t} I_2 + \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} (A - \lambda_1 I_2). \\ &= e^{\lambda_2 t} I_2 + \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} (A - \lambda_2 I_2) \end{aligned} \tag{4.33}$$

(ii) Dans le cas (4.31),

$$e^{tA} = e^{\lambda_0 t} I_2 + t e^{\lambda_0 t} (A - \lambda_0 I_2). \tag{4.34}$$

(iii) Dans le cas (4.32),

$$e^{tA} = e^{\alpha t} \{ \frac{\sin(\beta t)}{\beta} A + \left[\cos(\beta t) - \frac{\alpha}{\beta} \sin(\beta t) \right] I_2 \}. \tag{4.35}$$

Le lecteur-étudiant peut se demander d'où viennent ses formules... Nous le laissons à sa perplexité, nous nous contentons de les démontrer. Trois observations de cohérence au préalable :

— Les deux expressions de (4.33) sont en fait les mêmes, on a simplement interverti λ_1 et λ_2.

— La formule (4.34) est la formule (4.33) quand $\lambda_2 \longrightarrow \lambda_1$; en effet, la dérivation de $\lambda \longmapsto e^{\lambda t}$ (une fonction de λ !) donne que

$$\frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \longrightarrow te^{\lambda_1 t} \text{ quand } \lambda_2 \longrightarrow \lambda_1.$$

— La formule (4.35) est la même que celles de (4.33), elle est écrite avec $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, de sorte que seuls les réels α et β apparaissent *in fine* (ce qui est normal puisque e^{tA} est une matrice à coefficients réels).

Démonstration :
• 1er cas, (4.30). Soit

$$B(t) := e^{\lambda_1 t} I_2 + \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} (A - \lambda_1 I_2),$$
$$X(t) := B(t)v,$$

où v est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$.
Puisque $X(0) = B(0)v = v$, si nous démontrons que $X'(t) = AX(t)$, $t \in \mathbb{R}$, nous serons assurés que $B(t) = e^{tA}$, $t \in \mathbb{R}$ (en raison de ce qui a été dit en (4.18)).
Allons-y :

$$X'(t) = \lambda_1 e^{\lambda_1 t} v + \frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 t} - \lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} (Av - \lambda_1 v); \tag{4.36}$$

$$AX(t) = e^{\lambda_1 t} Av + \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(A^2 v - \lambda_1 Av\right). \tag{4.37}$$

La clé de la démonstration réside dans l'observation suivante : d'après le théorème de Cayley-Hamilton,

$$A^2 - (\operatorname{tr} A)A + \det A = 0,$$

c'est-à-dire

$$A^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)A + \lambda_1 \lambda_2 I_2 = 0,$$

d'où

$$A^2 v - \lambda_1 Av = \lambda_2 Av - (\lambda_1 \lambda_2)v.$$

Injectons cette expression de $A^2 v - \lambda_1 Av$ dans (4.37) et nous obtenons, après quelques calculs faciles, l'expression figurant dans (4.36). Donc le tour est joué : $B(t) = e^{tA}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

• 2eme cas, (4.31). Soit

$$B(t) := e^{\lambda_0 t} I_2 + te^{\lambda_0 t} (A - \lambda_0 I_2).$$
$$X(t) := B(t)v.$$

Comme précédemment, on calcule

$$X'(t) = -t\lambda_0^2 e^{\lambda_0 t} v + e^{\lambda_0 t} Av + t\lambda_0 e^{\lambda_0 t} Av, \tag{4.38}$$

$$AX(t) = e^{\lambda_0 t} Av + te^{\lambda_0 t} \left(A^2 v - \lambda_0 Av\right). \tag{4.39}$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton,

$$A^2 - 2\lambda_0 A + \lambda_0^2 I_2 = 0,$$

d'où

$$A^2 v - \lambda_0 A v = \lambda_0 A v - \lambda_0^2 v.$$

Reporter cette expression dans (4.39) conduit facilement à (4.38).
Nous avons bien démontré l'expression annoncée (4.34) de e^{tA}.

• 3$^{\text{eme}}$ cas, (4.32). Soit

$$B(t) := e^{\alpha t}\{\frac{\sin(\beta t)}{\beta} A + \left[\cos(\beta t) - \frac{\alpha}{\beta}\sin(\beta t)\right] I_2\},$$

$$X(t) := B(t)v.$$

Comme $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 = 2\alpha$ et $\det A = \lambda_1\lambda_2 = \alpha^2 + \beta^2$, le théorème de Cayley-Hamilton assure que

$$A^2 - 2\alpha A + (\alpha^2 + \beta^2) I_2 = 0,$$

d'où

$$A^2 v = 2\alpha A v - (\alpha^2 + \beta^2) v. \tag{4.40}$$

Or :

$$\begin{aligned} e^{-\alpha t} X'(t) &= \alpha\frac{\sin(\beta t)}{\beta} A v + \cos(\beta t) A v - \frac{\alpha^2}{\beta}\sin(\beta t) v - \beta \sin(\beta t) v, \\ e^{-\alpha t} A X(t) &= \frac{\sin(\beta t)}{\beta} A^2 v + \cos(\beta t) A v - \frac{\alpha}{\beta}\sin(\beta t) A v \\ &= \frac{\sin(\beta t)}{\beta}\left[2\alpha A v - (\alpha^2 + \beta^2) v\right] + \cos(\beta t) A v - \frac{\alpha}{\beta}\sin(\beta t) A v. \\ &\quad \text{[d'après (4.40)]} \end{aligned}$$

On voit donc que $e^{-\alpha t} X'(t) = e^{-\alpha t} A X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. La formule (4.35) annoncée est ainsi démontrée. □

On retiendra, à la suite du Théorème 4.1.14, que le calcul de e^{tA}, $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, est toujours possible et explicite ; il suffit de connaître les valeurs propres de A, c'est-à-dire résoudre une équation du second degré.

4.1.6 Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre n à coefficients constants : intégration dans le modèle (EDL)$_0$

Considérons l'équation différentielle suivante

$$\alpha_n y^{(n)} + \alpha_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + \alpha_1 y = 0 \tag{ed}_{n,0}$$

(on a laissé tomber la variable t pour alléger l'écriture), où $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1$ sont des réels.
Puisque $\alpha_n \neq 0$ (sinon ça n'est plus une équation différentielle d'ordre n), on ramène l'écriture

de $(\text{ed})_{n,0}$ à

$$y^{(n)} = a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_{n-1} y^{(n-1)}, \qquad (\text{ed})_{n,0}$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sont des réels (on utilisera toujours cette forme explicite en $y^{(n)}$, n étant l'ordre de dérivation le plus élevé).

Par un artifice mathématique déjà rencontré à plusieurs reprises, la forme « déployée » de $(\text{ed})_{n,0}$ est l'équation différentielle vectorielle du premier ordre $(\text{EDL})_0$ que voici :
Avec

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \cdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad \text{tour de passe-passe !}$$

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}'(t) \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \ldots & \ldots & a_{n-1} \end{bmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{pmatrix}. \qquad (4.41)$$

$$X'(t) = AX(t), \qquad (\text{EDL})_0$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice très particulière décrite en (4.41). Il faut bien voir que $(\text{EDL})_0$ n'est autre que la réécriture de $(\text{ed})_{n,0}$ via les transformations

$$x_1 = y, x_2 = y', \ldots, x_n = y^{(n-1)} \quad \text{(le tour de passe-passe !)}.$$

Résoudre $(\text{EDL})_0$ est résoudre $(\text{ed})_{n,0}$ et vice-versa. On a ainsi transformé une équation différentielle scalaire d'ordre n en une équation différentielle vectorielle du premier ordre ; ce faisant on est entré dans le moule des équations différentielles vectorielles (ou systèmes différentiels) du premier ordre à coefficients constants, objet du présent chapitre.
La forme très particulière de la matrice A en jeu fait que son polynôme caractéristique $P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$ est, au signe près, le polynôme suivant :

$$\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \cdots - a_k\lambda^k - \cdots - a_0 \qquad (4.42)$$

(au signe près car le polynôme caractéristique de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a toujours $(-1)^n\lambda^n$ comme terme de plus haut degré... et $\pm \det A$ comme terme constant).
A est parfois appelée *matrice compagnon* (ou *matrice compagne*) du polynôme figurant en (4.42). Si le lecteur-étudiant n'a jamais fait le calcul du déterminant de A, c'est l'occasion de le faire ; par exemple

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_0 & a_1 \end{bmatrix} \quad \text{a pour polynôme caractéristique } \lambda^2 - a_1\lambda - a_0,$$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $-(\lambda^3 - a_2\lambda^2 - a_1\lambda - a_0)$.

Donc les valeurs propres de A sont les racines de l'équation polynomiale

$$\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \cdots - a_k\lambda^k - \cdots - a_0 = 0, \tag{EC}$$

appelée *équation caractéristique* de $(\mathrm{ed})_{n,0}$... tiens, revoilà un objet déjà rencontré, du moins dans le cas $n = 1$ (§ 1.3 du chapitre 1) ou $n = 2$ (§ 1.4.1 du chapitre 1). Noter le qualificatif de caractéristique aussi bien dans polynôme caractéristique que dans équation caractéristique. Pour s'en souvenir, il est recommandé de mettre $(\mathrm{ed})_{n,0}$ et (EC) l'un en-dessous de l'autre :

$$\begin{aligned} &y^{(n)} - a_{n-1}y^{(n-1)} - \cdots - a_k y^{(k)} - \cdots - a_0 y = 0, && (\mathrm{ed})_{n,0} \\ &\downarrow \\ &\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \cdots - a_k\lambda^k - \cdots - a_0\lambda^0 = 0. && (\mathrm{EC}) \end{aligned}$$

Sans entrer dans les détails, voici les résultats (attendus et compréhensibles) sur la résolution de $(\mathrm{ed})_{n,0}$.

Théorème 4.1.15 Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les racines distinctes de l'équation caractéristique (EC) de $(\mathrm{ed})_{n,0}$, et soit n_k l'ordre de multiplicité de λ_k (k allant de 1 à p). Une famille de n solutions linéairement indépendantes de $(\mathrm{ed})_{n,0}$ est fournie par les fonctions (a priori à valeurs complexes)

$$\begin{aligned} t \in \mathbb{R} \longmapsto\ & e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{n_1-1}e^{\lambda_1 t}\ ,\ n_1 \text{ solutions} \\ & e^{\lambda_2 t}, te^{\lambda_2 t}, \ldots, t^{n_2-1}e^{\lambda_2 t}\ ,\ n_2 \text{ solutions} \\ & \ldots \\ & e^{\lambda_k t}, te^{\lambda_k t}, \ldots, t^{n_k-1}e^{\lambda_k t}\ ,\ n_k \text{ solutions} \\ & \ldots \\ & e^{\lambda_p t}, te^{\lambda_p t}, \ldots, t^{n_p-1}e^{\lambda_p t}\ ,\ n_p \text{ solutions.} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de $(\mathrm{ed})_{n,0}$ étant un espace vectoriel de dimension n, toute solution (complexe) de $(\mathrm{ed})_{n,0}$ est combinaison linéaire des n fonctions ci-dessus.

Quid des solutions réelles de $(\mathrm{ed})_{n,0}$?

Puisque les coefficients dans (EC) sont réels, les racines complexes dans (EC) vont deux par deux : si $\alpha+i\beta$, $\beta \neq 0$, est une racine de multiplicité n_k, alors le conjugué $\alpha-i\beta$ est également racine, avec la même multiplicité.

Au couple $(\lambda_k, \overline{\lambda_k}) = (\alpha + i\beta, \alpha - i\beta)$ de racines de multiplicité n_k sont associées les $2n_k$ solutions réelles de $(\mathrm{ed})_{n,0}$ que voici :

$$\begin{aligned} t \in \mathbb{R} \longmapsto\ & e^{\alpha t}\cos(\beta t), te^{\alpha t}\cos(\beta t), \ldots, t^{n_k-1}e^{\alpha t}\cos(\beta t), \\ & e^{\alpha t}\sin(\beta t), te^{\alpha t}\sin(\beta t), \ldots, t^{n_k-1}e^{\alpha t}\sin(\beta t). \end{aligned} \tag{4.43}$$

Si λ_k est racine réelle de (EC) de multiplicité n_k, n_k solutions sont fournies comme précédemment par

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{\lambda_k t}, te^{\lambda_k t}, \ldots, t^{n_k-1}e^{\lambda_k t}. \tag{4.44}$$

En somme, lorsque la racine λ_k est (vraiment) complexe, les solutions complexes $t \in \mathbb{R} \longmapsto t^m e^{\lambda_k t}$ et $t \in \mathbb{R} \longmapsto t^m e^{\overline{\lambda_k} t}$ sont remplacées par les solutions réelles $t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{Re}\left(t^m e^{\lambda_k t}\right)$ et $\mathrm{Im}\left(t^m e^{\lambda_k t}\right)$ [comme en p. 112].

Théorème 4.1.16 Soit

$$\begin{array}{ll} \lambda_1, \ldots, \lambda_r & \text{racines réelles de (EC),} \\ \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_{r+s} & \text{racines complexes de (EC),} \\ \overline{\lambda_{r+1}}, \ldots, \overline{\lambda_{r+s}} & \text{" "} \end{array} \qquad (\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k))$$

On désigne par n_k la multiplicité de la racine λ_k, de sorte que

$$(n_1 + n_2 + \cdots + n_r) + 2\,(n_{r+1} + n_{r+2} + \cdots + n_{r+s}) = n.$$

Alors, n solutions réelles linéairement indépendantes de $(\mathrm{ed})_{n,0}$ sont fournies par les fonctions

$$\begin{array}{rl} t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{n_1-1}e^{\lambda_1 t} & n_1 \text{ solutions} \\ \vdots & \\ e^{\lambda_r t}, te^{\lambda_r t}, \ldots, t^{n_r-1}e^{\lambda_r t} & n_r \text{ solutions} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{\alpha_{r+1}t}\cos(\beta_{r+1}t), \ldots, t^{n_{r+1}-1}e^{\alpha_{r+1}t}\cos(\beta_{r+1}t) \\ e^{\alpha_{r+1}t}\sin(\beta_{r+1}t), \ldots, t^{n_{r+1}-1}e^{\alpha_{r+1}t}\sin(\beta_{r+1}t) \end{array}\right\} [2n_{r+1} \text{ solutions}]$$

$$\vdots$$

$$\left.\begin{array}{r} e^{\alpha_{r+s}t}\cos(\beta_{r+s}t), \ldots, t^{n_{r+s}-1}e^{\alpha_{r+s}t}\cos(\beta_{r+s}t) \\ e^{\alpha_{r+s}t}\sin(\beta_{r+s}t), \ldots, t^{n_{r+s}-1}e^{\alpha_{r+s}t}\sin(\beta_{r+s}t) \end{array}\right\} [2n_{r+s} \text{ solutions}]$$

A vrai dire, le résultat est plus facile à comprendre, à retenir,... qu'à écrire.

Exemple 4.1.17 Considérons l'équation différentielle du troisième ordre suivante :

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$$

Son équation caractéristique est $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$, soit encore $(\lambda + 1)^3 = 0$.
Toutes ses solutions (réelles) sont les fonctions de la forme

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto y(t) = (at^2 + bt + c)e^{-t},$$

où a, b et c sont des réels.

Exemple 4.1.18 Une équation différentielle intervenant dans la théorie de l'élasticité des matériaux est la suivant :

$$y^{(4)} - a^4 y = 0, \quad \text{où } a > 0 \text{ est donné.} \tag{4.45}$$

C'est un des rares exemples d'équations différentielles intervenant en Mécanique et dont l'ordre est supérieur à 2.
L' équation caractéristique associée est :

$$r^4 - a^4 = 0,$$

dont les solutions sont $a, -a, ia, -ia$.
Au vu de ce que nous avons dit dans ce paragraphe 4.1.6, les solutions réelles de l'équation différentielle (4.45) sont les fonctions

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto y(t) = A\cos(at) + B\sin(at) + C\mathrm{ch}(at) + D\mathrm{sh}(at),$$

où A, B, C et D sont des réels.

4.2 Résolution de l'équation différentielle complète (EDL)

4.2.1 Résultat d'existence et d'unicité de solutions

Revenons à l'équation différentielle

$$X'(t) = AX(t) + b(t), \tag{EDL}$$

où $b : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction (vectorielle) continue sur l'intervalle ouvert I. Reprenons la fonction φ vue dans le cas homogène (*cf.* p. 105), $\varphi(t) = e^{-tA}X(t)$. Alors, via de simples calculs de dérivation de φ, on note :

$$(X \text{ solution de (EDL)}) \Longleftrightarrow \left(\varphi'(t) = e^{-tA}b(t), \quad \text{pour tout } t \in I\right).$$

Puisque la fonction $t \in I \longmapsto e^{-tA}b(t) \quad (\in \mathbb{R}^n)$ est continue sur I, on est assuré de pouvoir résoudre l'équation

$$\varphi'(t) = e^{-tA}b(t), \quad t \in I.$$

Cela conduit à l'existence de solutions de (EDL), ce qui n'était pas évident a priori.
Ensuite, quitte à se répéter, toujours en raison de la linéarité de l'opération de dérivation,

$$\left(X^1 \text{et} X^2 \text{ solutions de (EDL)}\right) \Longrightarrow \left(X^1 - X^2 \text{ solution de (EDL)}_0\right);$$

$$\left(\begin{array}{l} \overline{X} \text{ solution de (EDL)} \\ et \\ X_0 \text{ solution de (EDL)}_0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(X_0 + \overline{X} \text{ est solution de (EDL).}\right)$$

Tout ça pour redire :

$$\{\text{solutions de (EDL)}\} = \{\text{solutions de (EDL)}_0\} + \text{une solution « particulière » de (EDL).}$$

Conséquence :

Théorème 4.2.1 Soit $t_0 \in I$ et $v_0 \in \mathbb{R}^n$ donnés. Alors le problème de CAUCHY

$$(\mathscr{C}) \begin{cases} X'(t) = AX(t) + b(t) \\ X(t_0) = v_0 \end{cases}$$

a une et une seule solution.

Démonstration : La forme générale des solutions de (EDL) étant

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{tA}v + \overline{X}(t),$$

avec $v \in \mathbb{R}^n$ et $\overline{X}$ une solution de (EDL), il faut et il suffit, pour répondre à notre questionnement, qu'on « ajuste » v de sorte que

$$e^{t_0 A}v + \overline{X}(t_0) = v_0,$$

ce qui est chose faite avec $v = e^{-t_0 A}\left[v_0 - \overline{X}(t_0)\right]$. □

4.2.2 Techniques de recherche d'une solution « particulière » de (EDL)

4.2.2.1 Méthode dite de la « variation des constantes »

Idée : A partir de la forme générale des solutions de $(\text{EDL})_0$,

$$X(t) = C_1 X^1(t) + \cdots + C_n X^n(t)$$

(où $X^1, \ldots, X^n$ sont n solutions linéairement indépendantes de $(\text{EDL})_0$), on considère une candidature du type

$$\overline{X}(t) = C_1(t)X^1(t) + \cdots + C_n(t)X^n(t),$$

où les $C_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions dérivables sur I. On « injecte » ensuite $\overline{X}(t)$ et $\overline{X}'(t)$ dans (EDL) pour obtenir les $C_i(t)$. Mais attention !

- On ne cherche pas les C_i dans toute leur généralité, on est satisfait avec *un* jeu de $C_1, \ldots, C_n$; on peut donc imposer des conditions supplémentaires sur les C_i', qui les rendraient calculables par la résolution d'un système linéaire de CRAMER (revoir à ce sujet le § 3.2.1 du chapitre 3).
- La méthode peut donner lieu à des calculs lourds et fastidieux. Le lecteur-étudiant pourra se satisfaire de bien comprendre la méthode lorsque $n = 2$.

4.2.2.2 Cas d'un second membre $b(t)$ de type exponentielle-polynôme

Ce qui va suivre va rappeler furieusement ce qui a été exposé au § 1.4.3 du chapitre 1.
Supposons $b(t) = t^d e^{\alpha t}u_0$, où α est une constante réelle et u_0 un vecteur (donnés). Dans ce cas, on cherche (et on trouve !) une solution particulière de (EDL) de la forme

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \overline{X}(t) = e^{\alpha t}\left(w_0 + tw_1 + \cdots + t^{d+p}w_{d+p}\right), \tag{4.46}$$

($w_0, w_1, \ldots, w_{d+p}$ sont des vecteurs), lorsque α est racine de multiplicité p du polynôme caractéristique de A (ou encore, α est valeur propre d'ordre p de A). Etre obligé de « monter » le degré d lorsqu'il y a résonance (phénomène physique) rappelle ce qui a été vu au chapitre 1.

4.3 Final sur les équations différentielles scalaires d'ordre n (complètes) à coefficients constants

Considérons

$$y^{(n)} + \alpha_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + \alpha_1 y = b(t), \qquad (\mathrm{ed})_n$$

où $b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'intervalle ouvert I.
Après tout ce que nous avons vu, ce qui suit doit être clair

Théorème 4.3.1

(i) L'ensemble des solutions de $(\mathrm{ed})_n$ est un sous-espace affine de dimension n (de $E = C^1(I, \mathbb{R})$) ;

$$\{\text{solutions de } (\mathrm{ed})_n\} = \{C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n \mid C_1, \ldots C_n \text{ réels}\} + \overline{y},$$

où $y_1, \ldots, y_n$ sont n solutions linéairement indépendantes de $(\mathrm{ed})_{n,0}$ (l'équation différentielle homogène associée à $(\mathrm{ed})_n$, et $\overline{y}$ une solution particulière de l'équation différentielle complète $(\mathrm{ed})_n$.

(ii) Le problème de Cauchy

$$(\mathscr{C}) \begin{cases} ((\mathrm{ed})_n) \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}, \end{cases}$$

où $t_0 \in I$ et $y_0, y'_0, \ldots y_0^{(n-1)}$ sont des réels donnés, a une et une seule solution.

Pour la recherche d'une solution $\overline{y}$ de $(\mathrm{ed})_n$, on peut utiliser toutes les techniques relatives aux systèmes différentiels en les *adaptant* à ce contexte particulier, notamment :

— la méthode de la « variation des constantes » ;
— la considération des fonctions candidates $\overline{y}(t)$ du type $e^{rt}P(t)$, dans le cas où le second membre $b(t)$ est de la forme $t^d e^{rt}$.

⋆ Annexe 1 – Complément

Dans ce chapitre, nous avons étudié les équations différentielles scalaires d'ordre n comme sous-produits des équations différentielles vectorielles (ou systèmes différentiels) du premier ordre ($X'(t) = AX$), partie dans laquelle l'exponentielle de matrices, e^{tA}, jouait un rôle important. On peut aussi procéder dans l'autre sens : utiliser les solutions d'équations différentielles scalaires d'ordre n pour déterminer l'exponentielle d'une matrice.
Voici, sans démonstration, pour un lecteur-étudiant curieux, un résultat dans ce sens.

Théorème 4.3.2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de polynôme caractéristique

$$P_A(\lambda) = (-1)^n \left[\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0\right].$$

Alors

$$e^{tA} = y_1(t)I_n + y_2(t)A + \cdots + y_n(t)A^{n-1},$$

où y_k (k de 1 à n) est la solution du problème de Cauchy

$$(\mathscr{C}_k) \begin{cases} y^{(n)} + c_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + c_1y' + c_0y = 0 \\ y(0) = 0, \ldots, y^{(k)}(0) = 1, \ldots, y^{(n)}(0) = 0. \end{cases}$$

⋆ Annexe 2 – Complément

On a vu au § 1.4 du chapitre 1 l'importance de l'équation différentielle scalaire du second ordre

$$y'' - \alpha y = 0, \quad \text{où } \alpha \neq 0. \tag{4.47}$$

Le problème de Cauchy

$$(\mathscr{C}) \begin{cases} y'' - \alpha y = 0 \\ y(0) = a,\ y(0) = b \end{cases}$$

a une et une seule solution, qui est :

- Lorsque $\alpha > 0$,

$$y : t \in \mathbb{R} \longmapsto y(t) = a \cosh\left(\sqrt{\alpha} t\right) + \frac{b}{\sqrt{\alpha}} \sinh\left(\sqrt{\alpha} t\right). \tag{4.48}$$

Si on connaît les développements en série entière de cosh et sinh, à savoir

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad \sinh x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

on peut réécrire le résultat de (4.48) en

$$y(t) = a \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \right) + b \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \right). \tag{4.49}$$

- Lorsque $\alpha < 0$,

$$y : t \in \mathbb{R} \longmapsto y(t) = a \cos\left(\sqrt{-\alpha} t\right) + \frac{b}{\sqrt{-\alpha}} \sin\left(\sqrt{-\alpha} t\right). \tag{4.50}$$

Si on connaît les développements en série entière de cos et sin, à savoir

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad \sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

on peut réécrire le résultat de (4.50) en

$$y(t) = a \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \right) + b \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \right), \tag{4.51}$$

c'est-à-dire la même expression que (4.49).
La version vectorielle de (4.47) est le système différentiel du second ordre

$$Y''(t) = AY(t), \tag{4.52}$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Avec ce qui a été présenté au-dessus, le lecteur-étudiant ne sera donc pas surpris par le résultat suivant.

Théorème 4.3.3 Si on prescrit à Y les valeurs (matricielles) $Y(0)$ et $Y'(0)$, la seule solution de (4.52) est

$$Y : t \in \mathbb{R} \longmapsto Y(t) = Y(0) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k \right) + Y'(0) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} A^k \right). \tag{4.53}$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, A^n s'exprime comme une combinaison linéaire de $I_n, A, \ldots, A^{n-1}$. Donc,

$$C(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k \qquad \text{et} \qquad S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} A^k.$$

s'expriment comme des fonctions polynomiales de tA, de degré au plus $n-1$.
Dans le cas particulier où $n = 2$, on peut, comme au § 4.1.4, mener tous les calculs jusqu'au bout et expliciter $C(t)$ et $S(t)$ en fonction de I_2, A et les valeurs propres de A. Le lecteur-étudiant interpellé ne résistera pas à l'envie de le faire (*Indication* : il faut distinguer les cas où les valeurs propres (réelles ou complexes) sont distinctes ou pas, si l'une d'entre elles est nulle ou pas).

Chapitre 5

Classification des systèmes différentiels $X' = AX$ lorsque A est une matrice $(2, 2)$

Ce chapitre peut être considéré comme une annexe du chapitre précédent. Il consiste à tirer profit des propriétés particulières des matrices réelles $(2, 2)$ et de la géométrie du plan, pour classer les différentes formes des solutions de $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

Prérequis :

- Résultats généraux du chapitre 4
- Valeurs propres des matrices réelles (2,2)
- Techniques de représentation des courbes simples dans le plan.

Sommaire

5.1 Introduction 127
5.2 Situations où A est inversible et les valeurs propres de A sont distinctes 128
5.3 Prolongements possibles 138

5.1 Introduction

Nous revenons dans ce chapitre au cas où $n = 2$, c'est-à-dire à un couple de deux équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants (homogènes de surcroît) :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \qquad X'(t) = AX(t), \qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \qquad (\text{EDL})_0$$

soit encore

$$(\mathscr{C}) \begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t). \end{cases}$$

$(\text{EDL})_0$ est une équation différentielle vectorielle *autonome*, au sens où le second membre $AX(t)$ ne dépend de t que via $X(t)$ (au contraire de $A(t)X(t)$, non étudiée ici). Comme presque toujours en Physique ou en Mécanique, ce n'est pas tellement la date t qui importe (dans l'évolution de l'état $X(t)$ décrit par l'équation différentielle) mais la position $X(t)$ à l'instant t. Dans le cas des équations différentielles scalaires (chapitres 1, 2 et 3), on est amené à tracer le graphe de la (ou des) solution(s) $\{(t, x(t)) \mid t \in I\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ici, comme dans le chapitre suivant (chapitre 6), du fait que $(\text{EDL})_0$ est autonome et que $n = 2$, on considérera les ensembles

$$\{X(t) = (x(t), y(t)) \mid t \in I\} \subset \mathbb{R}^2,$$

appelés *trajectoires* ou *orbites* des solutions X de $(\text{EDL})_0$. L'espace $\mathbb{R}^2$ (= le plan) où vit $X(t)$ s'appelle le *plan des trajectoires*, ou *de phase* (en Physique, Mécanique).
Tracer l'allure générale des trajectoires, avec des flèches indiquant le sens de parcours quand t croît, s'appelle *dessiner le portrait des trajectoires* ou *de phase*.
Sans résoudre explicitement $(\text{EDL})_0$, il importe de pouvoir dégager les *propriétés qualitatives* des solutions comme : leur caractère périodique ou pas, leur comportement quand $t \longrightarrow +\infty$, etc. C'est à quoi nous nous attelons à présent, tout dépendant ici (comme on l'imagine) des propriétés spectrales (c'est-à-dire des valeurs propres) de la matrice A.
Rappelons que dans le cas qui nous préoccupe, celui où $n = 2$, on peut expliciter la solution du problème de Cauchy

$$(\mathscr{C}) \begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

en fonction des valeurs propres de A. De fait, *la* solution de $(\mathscr{C})$ est $X(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et e^{tA} est explicité dans tous les cas de figure (Théorème 4.1.14 du chapitre 4). Ce résultat suffit pour un traceur graphique. Ce que nous voulons ici est de pouvoir donner « à la main » l'allure générale des trajectoires X des solutions de $(\text{EDL})_0$, suivant les propriétés spectrales de A.

5.2 Situations où A est inversible et les valeurs propres de A sont distinctes

Si A est inversible, le seul point (x_0, y_0) du plan $\mathbb{R}^2$ pour lequel $A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est $(x_0, y_0) = (0, 0)$, c'est-à-dire l'origine. Donc, $X \equiv 0$ est la solution du problème de CAUCHY

$$\begin{cases} X'(t) = AX \\ X(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{5.1}$$

En bref : si je suis en $(0, 0)$, j'y reste... Le point origine $(0, 0)$ est une trajectoire particulière, qui jouera son rôle dans la classification qui va suivre.
Les valeurs propres (éventuellement complexes) de A sont les racines λ_1 et λ_2 de l'équation du second degré

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A = 0. \tag{5.2}$$

Quitte à nous répéter, rappelons que $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A$ et $\lambda_1\lambda_2 = \det A$.
Nous examinerons successivement les cas où λ_1 et λ_2 sont des réels (trois sous-cas en fonction du positionnement de λ_1 et λ_2 par rapport à 0) et celui où λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées (qui est à part).

5.2.1 Cas des valeurs propres réelles

L'exemple de situation la plus simple pour laquelle A a deux valeurs propres réelles distinctes (non nulles) est

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}. \tag{5.3}$$

Dans ce cas, la solution du problème de CAUCHY

$$\begin{cases} X'(t) = AX \\ X(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

est

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) = x_0 e^{\lambda_1(t-t_0)} \\ y(t) = y_0 e^{\lambda_2(t-t_0)} \end{pmatrix}.$$

Pour une matrice A plus générale que celle de (5.3), l'idée est de s'y ramener, après une « déformation » des positions des vecteurs, c'est-à-dire une diagonalisation de A.

1^{er} cas : λ_1 et λ_2 sont des réels, avec $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$.

La matrice A est diagonalisable. Soit donc $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ des vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2 respectivement. Nous savons que $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ constitue une base du plan $\mathbb{R}^2$ et nous avons vu au

chapitre précédent (chapitre 4, p. 108) qu'un système fondamental de solutions (c'est-à-dire deux solutions linéairement indépendantes) est fourni par

$$\begin{array}{l} X^1 : t \in \mathbb{R} \longmapsto X^1(t) = e^{\lambda_1 t}\overrightarrow{v_1}, \\ X^2 : t \in \mathbb{R} \longmapsto X^2(t) = e^{\lambda_2 t}\overrightarrow{v_2}. \end{array} \tag{5.4}$$

Ainsi, toute solution X de $(\mathrm{EDL})_0$ est de la forme

$$\begin{aligned} t \in \mathbb{R} \longmapsto X(t) &= C_1 X^1(t) + C_2 X^2(t) \\ &= C_1 e^{\lambda_1 t}\overrightarrow{v_1} + C_2 e^{\lambda_2 t}\overrightarrow{v_2}, \quad \text{où } C_1 \text{ et } C_2 \text{ sont des réels.} \end{aligned}$$

Les coordonnées $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ de $X(t)$ dans la nouvelle base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ du plan sont $\tilde{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}$ et $\tilde{y}(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}$. D'ailleurs, l'équation différentielle $(\mathrm{EDL})_0$ exprimée dans la (nouvelle) base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ est

$$\tilde{X}'(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \tilde{X}(t), \quad \text{avec } \tilde{X}(t) := \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix},$$

où, bien entendu,

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = P^{-1}AP,$$

$P = \begin{array}{c} \begin{matrix} \overrightarrow{v_1} & \overrightarrow{v_2} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \end{matrix}$ est la matrice de passage de la base canonique $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ à $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$.

Quelle est alors l'allure des trajectoires ?

Traçons tout d'abord les droites du plan dirigées par les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$. Ensuite :

- Le long de la demi-droite dirigée par $\overrightarrow{v_1}$: $e^{\lambda_1 t}\overrightarrow{v_1}$ « vient de l'origine $\Omega = (0,0)$ » (lorsque $t \in]-\infty, 0]$ jusqu'à $\overrightarrow{v_1}$, puis « s'échappe à l'infini » (lorsque $t \in [0, +\infty[$).
- Le long de la demi-droite dirigée par $\overrightarrow{v_2}$: comme ci-dessus, *mutatis mutandis*.
- Sinon, les coordonnées $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ (dans la base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$) de la solution $\tilde{X}(t)$ vérifient une relation de la forme

  $$\tilde{y} = K(\tilde{x})^r,$$

  où K est une constante et $r = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$ (on est d'accord ?). Les trajectoires s'échappent de l'origine tangentiellement à $\overrightarrow{v_1}$ ($\overrightarrow{v_1}$ est un vecteur propre associé à λ_1, la plus petite des valeurs propres).

Dans ce premier cas que nous venons de décrire, on dit que $\Omega = (0,0)$ est un *nœud répulsif* ou *instable*. L'allure des trajectoires est montrée dans la Figure 1.

Le problème de Cauchy

$$(\mathscr{C}) \begin{cases} (\mathrm{EDL})_0 \\ X(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{5.5}$$

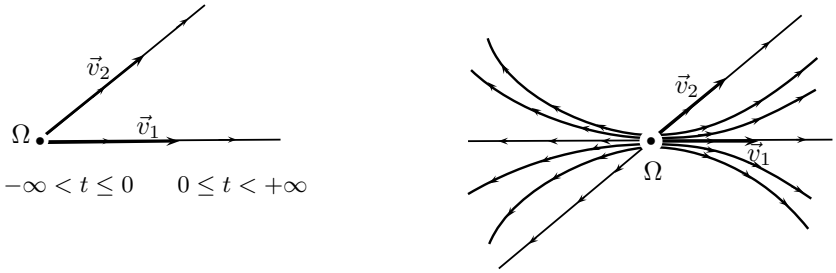


Figure 1

a une et une seule solution. Ainsi, tout le plan est « stratifié » par des trajectoires telles que décrites à la Figure 1.
Notons – et nous y reviendrons au chapitre suivant – qu'on peut évacuer le t_0 dans (5.5) et mettre $t_0 = 0$ sans perte de généralité. En effet, si X est la solution du problème de CAUCHY (5.5), la fonction $Y : t \in \mathbb{R} \longmapsto X(t_0 + t)$ est la solution du problème de CAUCHY

$$(\mathscr{C}) \begin{cases} (\text{EDL})_0 \\ Y(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

La vérification en est simple :

$$\begin{aligned} &Y'(t) = X'(t_0 + t) = AX(t_0 + t) = AY(t) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \\ &Y(0) = X(t_0). \end{aligned}$$

Il y a donc un simple décalage dans le temps ; les trajectoires de X et Y sont les mêmes.

$\boxed{2^{eme} \text{ cas : } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ sont des réels, avec } \lambda_1 < \lambda_2 < 0.}$

Ce cas est très voisin du précédent. En fait, par rapport au cas précédent, c'est comme si on avait changé le sens du temps, t en $-t$. En effet, si $Y(t) := X(-t)$, il est immédiat que $Y'(t) = -X'(-t) = -AX(-t) = (-A)Y(t)$, et que changer A en -A nous fait passer, pour les valeurs propres, du deuxième cas au premier $(-\lambda_1 > -\lambda_2 > 0)$.
Traçons les droites du plan dirigées par $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$, vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2 respectivement. Allure des trajectoires :

- Le long de la demi-droite dirigée par $\overrightarrow{v_1}$: $e^{\lambda_1 t}\overrightarrow{v_1}$ « vient de l'infini » (quand $t \in]-\infty, 0]$) jusqu'à $\overrightarrow{v_1}$ (n'oublions pas que $\lambda_1 < 0$!), puis « tend vers l'origine Ω » (quand $t \in [0, +\infty[$) sans l'atteindre.
- Le long de la trajectoire dirigée par $\overrightarrow{v_2}$: comme ci-dessus, *mutatis mutandis*.
- Sinon, les coordonnées $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ (dans la base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$) de la solution $\tilde{X}(t)$ vérifient une relation du type

$$\tilde{x} = K(\tilde{y})^r,$$

où K est une constante et $r = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$ (attention, en raison des signes, $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} > 1$). Les trajectoires tendent vers l'origine tangentiellement à $\overrightarrow{v_2}$ ($\overrightarrow{v_2}$ est un vecteur propre associé à λ_2, la plus petite en module des deux valeurs propres : $|\lambda_2| < |\lambda_1|$).
Dans le cas que nous venons de décrire, on dit que $\Omega = (0,0)$ est un *nœud attractif* ou (asymptotiquement) *stable*. Voir la Figure 2.

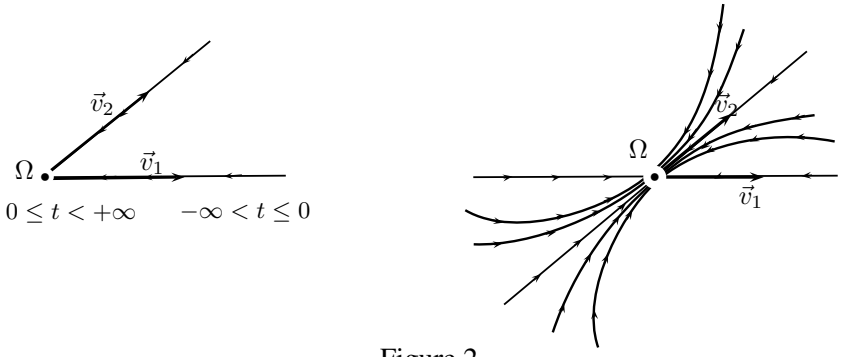


Figure 2

3^{eme} cas : λ_1 et λ_2 sont réels et de signe opposé, $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ par exemple.

Ici, comme on l'imagine, c'est un mélange des deux premiers cas. Allure des trajectoires :

- Le long de la droite dirigée par $\overrightarrow{v_1}$ (un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 > 0$) c'est comme dans le premier cas : répulsion à partir de $\Omega = (0,0)$.
- Le long de la droite dirigée par $\overrightarrow{v_2}$ (un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2 < 0$) c'est comme dans le deuxième cas : attraction vers $\Omega = (0,0)$.
- Sinon, les coordonnées $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ (dans la base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$) de la solution $\tilde{X}(t)$ vérifient une relation du type

$$\tilde{x} = \frac{K}{(\tilde{y})^r},$$

où K est une constante et $r > 0$ (d'où, $\tilde{x} \longrightarrow \pm\infty$ quand $t \longrightarrow +\infty$, tandis que $\tilde{y} \longrightarrow 0$).

Dans ce troisième cas, on dit que $\Omega = (0,0)$ est un *point-selle* (depuis l'époque du cheval), ou un *col* (chez les contrebandiers basques)... Voir la Figure 3.

Résumons la procédure de tracé du portrait des trajectoires, pour les trois cas que nous venons d'examiner :

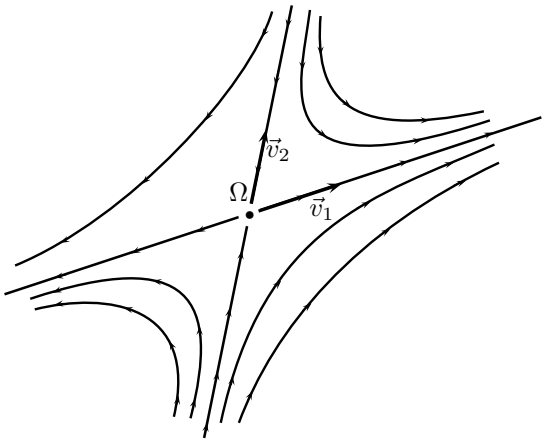


Figure 3

— Déterminer des vecteurs propres $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2 (respectivement). Tracer les droites du plan dirigées par $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$.
— Flécher vers l'origine $\Omega = (0, 0)$ si la valeur propre est < 0 (attraction).
— Flécher en s'éloignant de l'origine $\Omega = (0, 0)$ si la valeur propre est > 0 (répulsion).
— Entre les deux droites fléchées, dans les quatre quadrants du plan, esquisser les trajectoires de manière à être cohérent avec le fléchage des axes (c'est-à-dire à les suivre).

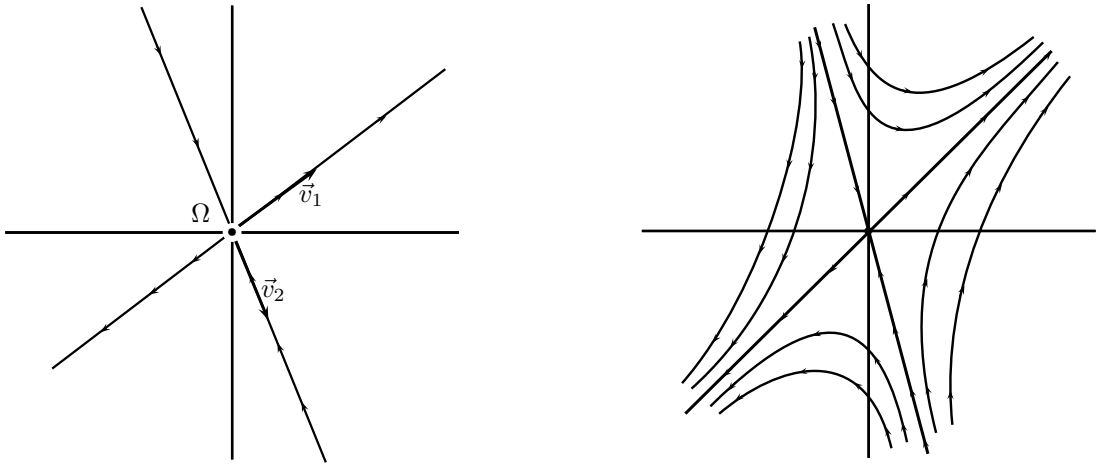
Exemple 5.2.1 Esquissons (sans les calculer !) les trajectoires des solutions de

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 4x - 2y. \end{cases}$$

Ici, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, dont les valeurs propres sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -3$. Choisissons $\overrightarrow{v_1} = (1, 1)$ comme vecteur propre associé à λ_1 et $\overrightarrow{v_2} = (1, -4)$ comme vecteur propre associé à λ_2. Alors, le tracé du portrait des trajectoires se fait en deux temps : *cf.* Figure 4.

Il y a un contexte dans lequel on est assuré que A a des valeurs propres réelles, c'est celui où A est (une matrice) *symétrique*. Il y a là l'occasion de commenter encore davantage les trois cas que nous avons examinés, de faire des rapprochements intéressants avec le Calcul différentiel et l'Optimisation (de fonctions de deux variables).
Supposons donc, pour le reste de ce sous-paragraphe 5.2.1, que, en plus d'être inversible,

$$A \text{ est symétrique}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}. \tag{5.6}$$



(I) Droites dirigées par $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$
Fléchage de ces droites

(II) Esquisse des trajectoires (fléchées)

Figure 4

A la matrice A est naturellement associée une fonction de deux variables q, appelée encore *forme quadratique* associée à A,

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto q(x,y) = \frac{1}{2} X^\top A X, \quad \text{où } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{5.7}$$
$$= \frac{1}{2}\left(ax^2 + 2bxy + cy^2\right).$$

Le coefficient $\frac{1}{2}$ n'est là que pour éviter de traîner un coefficient 2 dans les calculs qui vont suivre.
Le résultat essentiel (d'Algèbre linéaire et bilinéaire) concernant A est : *A a des valeurs propres réelles et elle est diagonalisable dans une base orthogonale de vecteurs propres.*
Soit $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ une base du plan $\mathbb{R}^2$ constituée de vecteurs propres de A ($\overrightarrow{v_1}$ est associé à la valeur propre λ_1 de A, $\overrightarrow{v_2}$ à la valeur propre λ_2). On peut toujours s'arranger pour que $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ soient de longueur 1. On a ainsi une base orthonormée $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ du plan, exactement comme $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$. Dans cette nouvelle base, les coordonnées sont notées $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$, la forme quadratique q prend la forme réduite que voici :

$$q(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lambda_1(\tilde{x})^2 + \lambda_2(\tilde{y})^2. \tag{5.8}$$

Du point de vue du Calcul différentiel, la fonction q dispose de toutes les dérivées partielles que l'on veut, son vecteur gradient $\overrightarrow{\bigtriangledown} q(x,y)$ en (x,y) est :

$$\overrightarrow{\bigtriangledown} q(x,y) = \begin{pmatrix} ax + by \\ bx + cy \end{pmatrix} = AX.$$

Ainsi, notre équation différentielle $(\mathrm{EDL})_0$ peut être réécrite en

$$X'(t) = \overrightarrow{\nabla q}\,[X(t)]\,, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5.9}$$

Mais, quelle est la signification géométrique du vecteur $\overrightarrow{\nabla q}$ pour la fonction q ?
La fonction q a des courbes de niveau, $C_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid q(x, y) = r\}$, où r est un réel. Alors, le vecteur gradient $\overrightarrow{\nabla q}(x, y)$ est orthogonal à la courbe de niveau de q en (x, y) (c'est-à-dire, la droite dirigée par $\overrightarrow{\nabla q}(x, y)$ est perpendiculaire à la droite tangente à la courbe de niveau) ; voir la Figure 5 en-dessous.
Ce qu'exprime (5.9) est donc, qu'à chaque instant t, le vecteur vitesse $X'(t)$ d'une solution X de $(\mathrm{EDL})_0$ suit le gradient de la fonction q à la position $X(t)$. En conséquence, les trajectoires suivies par les solutions X de $(\mathrm{EDL})_0$ (les orbites donc) sont des courbes orthogonales aux courbes de niveau C_r de q.

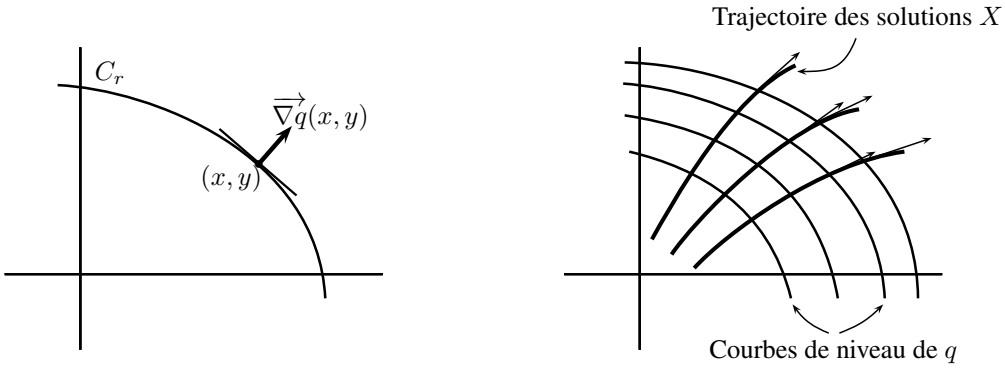


Figure 5

Revoyons à la lumière de ces observations les trois cas de figure examinés jusqu'à présent (valeurs propres réelles λ_1, λ_2).
1^{er} cas : $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$. Alors, le graphe de la fonction q (cf. (5.8)) a la forme d'un bol. Ses courbes de niveau sont des ellipses.
2^{eme} cas : $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Alors, le graphe de la fonction q a la forme d'une calotte. Ses courbes de niveau sont encore des ellipses. Ce n'est que la version « renversée » du précédent.
3^{eme} cas : $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$. Le graphe de la fonction q a alors la forme d'une selle de cheval ou d'un col. Ses courbes de niveau sont des hyperboles.
En suivant, en chaque instant t, la direction de « plus grande montée » de la fonction q en $(x(t), y(t))$, une solution $X(t)$ de $(\mathrm{EDL})_0$ s'éloigne de $\Omega = (0, 0)$ dans le premier cas, s'en approche dans le deuxième cas, et est un mélange des deux (« ça dépend »...) dans le troisième cas.

5.2.2 Cas des valeurs propres complexes conjuguées

Revenons à notre classification, et étudions le dernier cas, celui où les valeurs propres de A ne sont plus réelles.

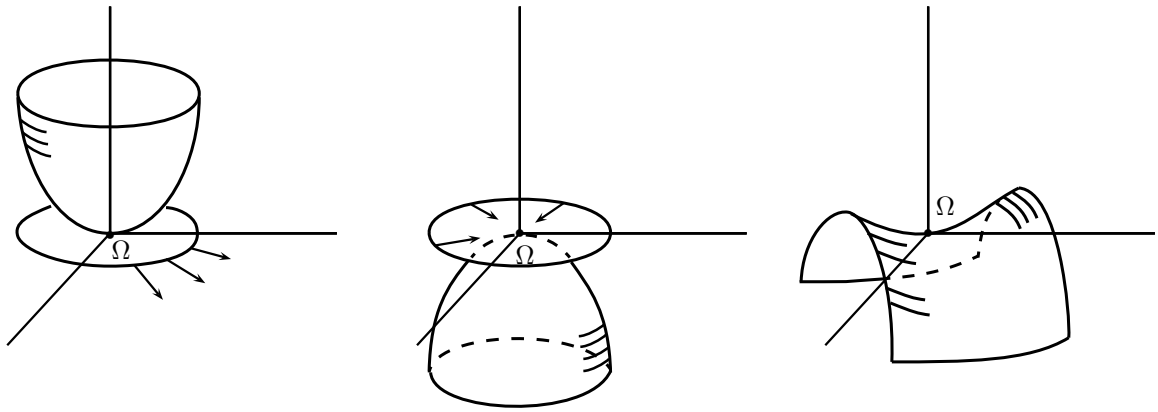


Figure 6

4^{eme} cas : λ_1 et λ_2 sont deux nombres complexes conjugués (distincts) :
$\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - i\beta$ avec $\beta \neq 0$.

5.2.2.1 Le cas le plus simple

Commençons par le cas le plus simple, celui où $A = \begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$, c'est-à-dire A est antisymétrique ($A^T = -A$). Nous avons donc

$$X'(t) = AX(t), \quad \text{soit} \begin{cases} x'(t) = -\beta y(t) \\ y'(t) = \beta x(t). \end{cases} \tag{5.10}$$

Cette équation différentielle (vectorielle) n'est que la forme déployée de l'équation différentielle (scalaire) du second ordre

$$x''(t) + \beta^2 x(t) = 0,$$

dont nous connaissons les solutions (*cf.* § 1.4.1.4 du chapitre 1) :

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto x(t) = C\cos(\beta t - \varphi),$$

où C et φ sont des réels. Ainsi, les solutions de (5.10) sont les fonctions

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto X(t) = \begin{cases} x(t) = C\cos(\beta t - \varphi) \\ y(t) = C\sin(\beta t - \varphi). \end{cases}$$

Interprétation cinématique : Le mouvement du mobile de position $X(t)$ dans le plan est un mouvement circulaire, sur un cercle de rayon $|C|$, de vitesse angulaire β (puisque l'angle $\theta(t)$ du vecteur $X(t)$ avec l'axe des abscisses est $\theta(t) = \beta t - \varphi, \quad t \in \mathbb{R}$) ; le sens de parcours dépend du signe de β, dans le sens des aiguilles d'une montre si $\beta < 0$, dans le sens contraire des aiguilles d'une montre si $\beta > 0$ [1]. Voir Figure 7a.

1. Récemment, un étudiant m'a posé la question : « *C'est quoi les aiguilles d'une montre ?...* »

5.2.2.2 Un cas un peu plus général

Un cas à peine plus général que (5.10), celui le plus simple des matrices A (à coefficients réels) ayant $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - i\beta$ comme valeurs propres, est $\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$. Nous avons alors :

$$X'(t) = AX(t), \quad \text{soit} \begin{cases} x'(t) = \alpha x(t) - \beta y(t) \\ y'(t) = \beta x(t) + \alpha y(t). \end{cases} \tag{5.11}$$

Sachant que la forme générale des solutions de $X'(t) = AX(t)$ est $t \in \mathbb{R} \longmapsto X(t) = e^{tA}X_0$, avec $X_0 = X(0)$, et connaissant l'expression de e^{tA} qui vaut ici

$$\begin{bmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{bmatrix} \quad \textit{(cf.} \S\ 4.1.5),$$

les solutions non nulles de (5.11) sont

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto X(t) = \begin{cases} x(t) = e^{\alpha t}\left[x_0 \cos(\beta t) - y_0 \sin(\beta t)\right] \\ y(t) = e^{\alpha t}\left[x_0 \sin(\beta t) + y_0 \cos(\beta t)\right], \end{cases} \qquad X(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.12}$$

Comme plus haut, désignons par φ l'angle de déphasage, celui tel que $\cos\varphi = \dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$, $-\sin\varphi = \dfrac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$. Après avoir observé que la longueur $r(t)$ d'une solution est

$$r(t) := \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = e^{\alpha t}\sqrt{x_0^2 + y_0^2},$$

les expressions de (5.12) se réécrivent en :

$$\begin{cases} x(t) = r(t)\cos\left(\beta t - \varphi\right), \\ y(t) = r(t)\sin\left(\beta t - \varphi\right). \end{cases} \tag{5.13}$$

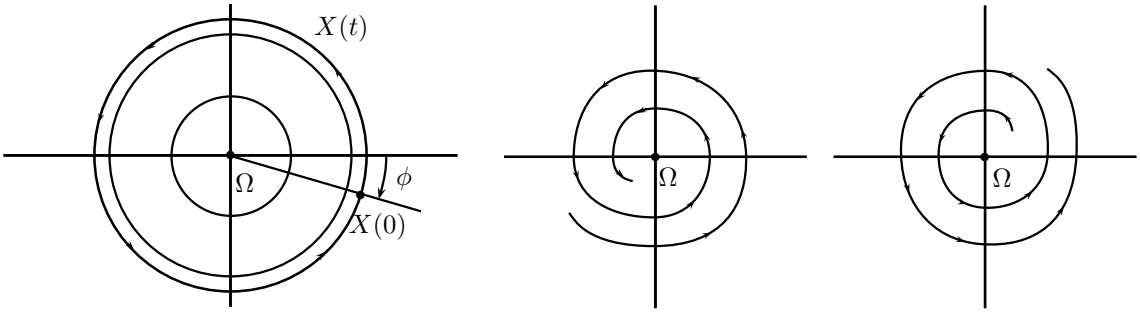
Allure des trajectoires :
Elles tournent en spirale autour de l'origine $\Omega = (0, 0)$ avec une vitesse angulaire β ; elles s'approchent ou s'éloignent de l'origine Ω sous l'action de $e^{\alpha t}$. Cela conduit à la classification suivante :

- Si $\alpha < 0$: Les trajectoires spiralent vers Ω (sans l'atteindre toutefois) ; on dit que Ω est un *foyer attractif* (ou *stable*).
- Si $\alpha > 0$: Les trajectoires s'éloignent de Ω en spiralant ; on dit que Ω est un foyer *répulsif* (ou *instable*).

Le sens de parcours dépend du signe de β. Voir Figure 7b.

5.2.2.3 Le cas le plus général

Abordons enfin le cas général de $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ayant $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - i\beta$ comme valeurs propres.



$\alpha = 0,\ \beta > 0$ (a) $\quad \alpha < 0,\ \beta > 0$ (b) $\quad \alpha > 0,\ \beta > 0$

Figure 7

Le point-clé consiste à montrer que A est semblable à $\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ ou à $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$, c'est-à-dire que, moyennant un changement de base du plan, on se retrouve dans la situation du § 5.2.2.2. Comme cela a été vu au chapitre précédent,

— Si $\overrightarrow{w} \in \mathbb{C}^2$ est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, alors $\overrightarrow{\overline{w}}$ est vecteur propre de A associé à $\overline{\lambda}$.

— Les fonctions $\{t \longmapsto \mathrm{Re}\left(e^{\lambda t}\overrightarrow{w}\right),\quad t \longmapsto \mathrm{Im}\left(e^{\lambda t}\overrightarrow{w}\right)\}$ constituent un système fondamental de solutions *réelles* de $X'(t) = AX(t)$.

Précisons et développons un peu plus ces points.

• $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v_1} + i\overrightarrow{v_2}$, avec $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^2$, et donc $\overrightarrow{\overline{w}} = \overrightarrow{v_1} - i\overrightarrow{v_2}$.

Alors, $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ *constitue une base de* $\mathbb{R}^2$, la base adéquate que nous cherchons.

Soit en effet α_1 et α_2 des réels tels que $\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} = 0$; nous devons démontrer que $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = 0$ nécessairement.

Comme dans le cas des nombres complexes usuels, nous avons les relations suivantes sur les vecteurs :

$$\overrightarrow{v_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{w} + \overrightarrow{\overline{w}}\right), \quad \overrightarrow{v_2} = \frac{1}{2i}\left(\overrightarrow{w} - \overrightarrow{\overline{w}}\right).$$

Par suite,

$$\frac{\alpha_1}{2}\left(\overrightarrow{w} + \overrightarrow{\overline{w}}\right) + \frac{\alpha_2}{2i}\left(\overrightarrow{w} - \overrightarrow{\overline{w}}\right) = 0,$$

soit encore

$$(\alpha_1 - i\alpha_2)\,\overrightarrow{w} + (\alpha_1 + i\alpha_2)\,\overrightarrow{\overline{w}} = 0. \tag{5.14}$$

Or, $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{\overline{w}}$ sont des vecteurs de $\mathbb{C}^2$ qui sont linéairement indépendants (car $\{\overrightarrow{w}, \overrightarrow{\overline{w}}\}$ est une base de vecteurs propres) ; donc (5.14) implique

$$\alpha_1 - i\alpha_2 = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_1 + i\alpha_2 = 0,$$

d'où $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = 0$.
Mais attention ! $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ ne sont pas des vecteurs propres de A.

• Des solutions *complexes*

$$Z^1 : t \in \mathbb{R} \longmapsto Z^1(t) = e^{\lambda t}\overrightarrow{w} = e^{(\alpha+i\beta)t}\,(\overrightarrow{v_1} + i\overrightarrow{v_2})\,,$$

$$Z^2 : t \in \mathbb{R} \longmapsto Z^2(t) = \overline{Z^1}(t) = e^{(\alpha-i\beta)t}\,(\overrightarrow{v_1} - i\overrightarrow{v_2})\,,$$

on tire les deux solutions *réelles* linéairement indépendantes que voici :

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto X^1(t) = \mathrm{Re}(e^{\lambda t}\overrightarrow{w}) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)\overrightarrow{v_1} - e^{\alpha t}\sin(\beta t)\overrightarrow{v_2}$$

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto X^2(t) = \mathrm{Im}(e^{\lambda t}\overrightarrow{w}) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)\overrightarrow{v_1} + e^{\alpha t}\cos(\beta t)\overrightarrow{v_2}.$$

Exprimées en coordonnées $\tilde{x}, \tilde{y}$ dans la base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ du plan, les solutions de notre équation différentielle sont :

$$\begin{pmatrix}\tilde{x_1}(t)\\ \tilde{y_1}(t)\end{pmatrix} = e^{\alpha t}\begin{pmatrix}\cos(\beta t)\\ -\sin(\beta t)\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\tilde{x_2}(t)\\ \tilde{y_2}(t)\end{pmatrix} = e^{\alpha t}\begin{pmatrix}-\sin(\beta t)\\ \cos(\beta t)\end{pmatrix}. \tag{5.15}$$

On y reconnaît la forme des solutions de (5.12).
Bref, les trajectoires des solutions sont comme dans la Figure 7, « déformées » dans la base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ du plan.

5.3 Prolongements possibles

— Il y a deux cas que nous n'avons pas considérés dans la classification du § 5.2, celui où A a une valeur propre double (réelle λ_0), et celui où l'une des valeurs propres de A est nulle (et donc A n'est pas inversible).
Disons que ce sont des cas un peu « dégénérés », qui se traitent facilement selon une approche similaire à celles vues au § 5.2.

★ — Une classification des solutions de systèmes $X'(t) = AX(t)$, avec A matrice réelle $(3,3)$ est également possible. Là encore, ce sont les propriétés des valeurs propres de A qui guident la classification.

En guise d'épilogue
« ...On a presque tout compris sur les équations différentielles linéaires du deuxième ordre si l'on a compris celles à coefficients constants.
On a presque tout compris sur les équations différentielles linéaires si l'on a compris les équations différentielles linéaires du deuxième ordre... »

George Birkhoff (1884-1944), un des plus grands spécialistes (américains) d'équations différentielles de la première moitié du XX^e siècle.

Nous quittons avec ce chapitre le monde linéaire... Les équations différentielles *non linéaires* sont une autre paire de manches. Nous leur consacrons le chapitre suivant, le chapitre 6.

Chapitre 6

Équations différentielles non linéaires : une première visite

« Ce qui est simple est toujours faux, ce qui ne l'est pas est inutilisable »

P. Valery

Avec ce chapitre nous entrons dans le vif des équations différentielles *non linéaires*... Le monde est non linéaire : too bad ! Certaines des choses dites à propos des équations différentielles linéaires (dans les chapitres précédents) restent valables, mais il y a bien des propriétés qu'on ne peut imaginer retrouver dans le cas non linéaire (qui est, de fait, plus difficile à traiter).

Pour cette première visite de l'immeuble « équations différentielles non linéaires », nous nous contenterons de jeter un coup d'œil dans deux pièces :

— celle des équations différentielles *scalaires*

$$y'(t) = f(t, y(t));$$

— celle des équations différentielles *vectorielles autonomes* où l'espace de phase est le *plan*

$$\begin{cases} x'(t) = f\left[x(t), y(t)\right], \\ y'(t) = g\left[x(t), y(t)\right]. \end{cases}$$

Sommaire

6.1 Généralités 141
6.2 Exemples divers 146
6.3 Un résultat d'existence et d'unicité dans un problème de Cauchy scalaire 154
6.4 Systèmes différentiels non linéaires du plan, notamment autonomes 162

Commençons par des généralités.

6.1 Généralités

6.1.1 Ce qu'est une équation différentielle, ce que signifie « la résoudre »

• *Cas scalaire.* Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et

$$\begin{array}{rccc} f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \text{même dimension d'espace !} \\ (t, u) & \longmapsto & f(t, u) & \end{array} \tag{6.1}$$

une fonction continue (au moins). Une équation différentielle du premier ordre est une « équation aux dérivées » du type

$$x' = f(t, x). \tag{ed}$$

Jusqu'ici, pour les équations différentielles scalaires, nous utilisions la notation $y(t)$ pour les fonctions inconnues. Autres notations utilisées :
$\dot{x} = f(t, x)$ (en Mécanique, Automatique), $\dfrac{dx}{dt} = f(t, x)$ (en Physique, Biologie), $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ (en Mathématiques, dans des problèmes de nature géométrique où les inconnues sont des courbes graphes de fonctions $y \longmapsto y(x)$), etc. On appelle *solution* de (ed) un couple (J, x) où :

- J est un intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$,
- $x : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur J,

tels que

$(t, x(t)) \in \Omega$ pour tout $t \in J$ [puisqu'on va appliquer f à $(t, x(t))$!]
$x'(t) = f(t, x(t))$ pour tout $t \in J$.

Une solution est donc un couple (même si par habitude on parlera de « solution x définie sur J »), J peut varier et, bien entendu, plus J est grand et mieux c'est... Cette insistance à accompagner x de l'intervalle sur laquelle elle est définie n'avait pas lieu d'être dans le monde linéaire, elle apparaîtra de manière essentielle dans le monde non linéaire. « Résoudre » ou « intégrer » (ed) signifie trouver les solutions de (ed). « Intégrer » est un vocable vieillot, demeuré en usage depuis l'époque où on s'efforçait de résoudre toutes les équations différentielles par intégration.

Exemple 6.1.1 Considérons l'équation différentielle

$$x'(t) = [x(t)]^2 .$$

La fonction $x_1 : t \in J =]-1, 1[\longmapsto x_1(t) = \dfrac{1}{1-t}$ est une solution de cette équation différentielle ; la fonction $x_2 : t \in J =]-\infty, 1[\longmapsto x_2(t) = \dfrac{1}{1-t}$ aussi... On peut considérer qu'on a « mieux » résolu l'équation différentielle avec la solution x_2, puisque celle-ci est un prolongement (ou une extension) de x_1.
La variable, *unidimensionnelle*, par rapport à laquelle se font les dérivations sera notée (habituellement) t, en référence au temps qu'elle représente souvent dans les applications.

Comme la fonction f a été supposée continue (au moins), une solution $x : J \longrightarrow \mathbb{R}$ de (ed) est continûment dérivable (au moins) sur J. L'écriture $x' = f(t,x)$ est une *abréviation* de $x'(t) = f[t, x(t)]$; on évitera bien des déboires en écrivant dans un premier temps, systématiquement, $x'(t) = f\,[t, x(t)]$, c'est-à-dire en faisant apparaître la variable t partout où elle intervient.

Il ne faut pas trop se laisser distraire par cet ensemble Ω sur lequel est définie la fonction f (de fait, f est ce qui « gouverne » la dynamique de l'équation différentielle (ed)), même si dans les exemples il faudra bien voir ce que c'est. Dans beaucoup des cas considérés dans notre visite, Ω est de forme $I \times \mathbb{R}$, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ (t est contraint de « vivre » dans I, tandis que $x(t)$ peut faire ce qu'il veut). C'était le cas pour les équations différentielles linéaires où I était un intervalle sur lequel tous les coefficients dans l'équation différentielle étaient continus.
Une équation différentielle (ed) est dite *autonome* lorsque f ne dépend que de u (et non de t) :

$$x' = g(x),$$

où $g : U \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue (au moins) sur un ouvert U de $\mathbb{R}$. Si on se cale sur le schéma décrit au début du paragraphe, on a :

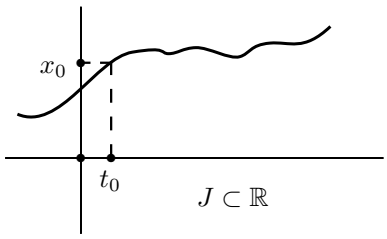
$$\Omega = \mathbb{R} \times U, \quad f : (t,u) \in \mathbb{R} \times \Omega \longmapsto f(t,u) := g(u).$$

Dans beaucoup de problèmes d'évolution (la plupart de ceux rencontrés en Mécanique), la vitesse $x'(t)$ de l'« état » $x(t)$ (du système qui évolue avec t) ne dépend de t qu'à travers la position à l'instant t, d'où des équations différentielles autonomes.
On dit qu'une solution (J,x) de (ed) *passe par* $(t_0,x_0) \in \Omega$ lorsque $t_0 \in J$ et $x(t_0) = x_0$. Résoudre le *problème (dit) de* CAUCHY

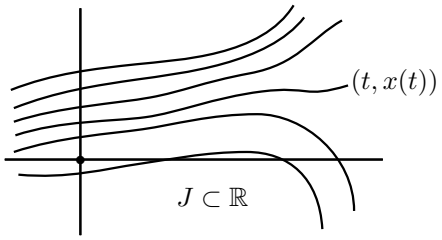
$$(\mathscr{C}) \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

consiste à trouver les solutions de (ed) passant par (t_0,x_0) ; on parle aussi du problème de CAUCHY relatif « aux conditions initiales $(t_0,x_0) \in \Omega$ ». Si, parmi ces solutions, on peut en exhiber une « meilleure » que toutes les autres, ce sera tant mieux. Que le lecteur-étudiant se rassure : on se mettra toujours dans cette situation.
L'espace où « vit » une solution $x : J \longrightarrow \mathbb{R}$ de (ed) étant de dimension 1 (la droite réelle), quand il s'agit de la représenter, on trace son graphe, c'est-à-dire $\{(t,x(t)) \mid t \in J\} \subset \mathbb{R}^2$.

• *Cas vectoriel.* (cas du plan exclusivement). Adaptons ce qui précède, *mutatis mutandis*. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ et



Solution d'un problème de CAUCHY



Représentation graphique de solutions

Figure 1

$$\begin{array}{l} F : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \quad \mathbb{R}^2 \quad \text{même dimension d'espace !} \\ \quad (t,(u,v)) \quad \longmapsto F(t,(u,v)) \end{array} \tag{6.2}$$

une fonction (vectorielle) continue (au moins). Une équation différentielle vectorielle du premier ordre (ou système de deux équations différentielles scalaires) est une « équation aux dérivées »

$$X' = F(t, X). \tag{ED}$$

Ceci est une forme abrégée d'écriture recouvrant plusieurs choses :

— la fonction inconnue X est à valeurs vectorielles (dans le plan),

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix};$$

— la fonction F qui gouverne l'équation différentielle

$$F(t,(u,v)) = \begin{pmatrix} f(t,(u,v)) \\ g(t,(u,v)) \end{pmatrix},$$

de sorte que (ED) signifie

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = f[t, x(t), y(t)] \\ y'(t) = g[t, x(t), y(t)]. \end{array} \right.$$

Par souci de lisibilité et de repérage, nous réservons les lettres capitales à ce qui est vectoriel. Une solution de (ED) est un couple (J, X) où :

- J est un intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$;
- $X : J \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une fonction dérivable sur J, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$,

tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} (t, x(t), y(t)) \in \Omega \quad \text{pour tout } t \in J, \\ x'(t) = f[t, x(t), y(t)] \\ y'(t) = g[t, x(t), y(t)] \end{array} \right\} \text{pour tout } t \in J.$$

Une équation différentielle (ED) est dite *autonome* lorsque F ne dépend que de u et de v (et non de t) :

$$X' = G(X),$$

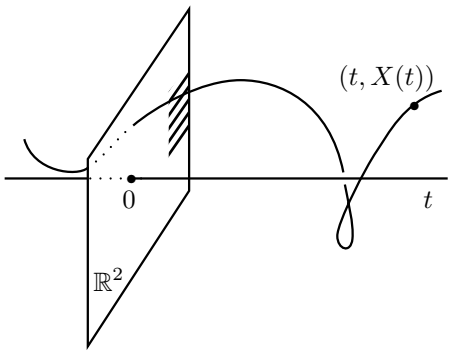
où $G : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une fonction continue (au moins) sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.
Comme précédemment, l'ouvert Ω sur lequel est défini F peut être simplement $I \times \mathbb{R}^2$, avec I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
Si $\left(t_0, X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right) \in \Omega$, résoudre le problème de CAUCHY

$$(\mathscr{C}) \begin{cases} X' = F(t, X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

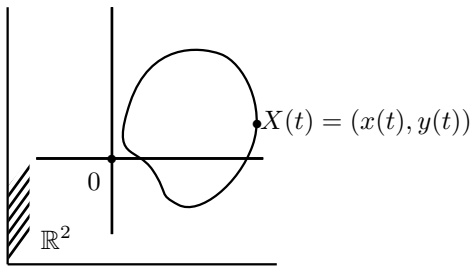
consiste à trouver les solutions $X : J \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de (ED) passant par (t_0, X_0), c'est-à-dire vérifiant

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} x'(t) = f[t, x(t), y(t)] \\ y'(t) = g[t, x(t), y(t)] \end{array}\right\} \text{pour tout} \in t \in J \\ \left.\begin{array}{l} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{array}\right\}. \end{cases}$$

On peut essayer de représenter les graphes des solutions $X : J \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de (ED), c'est-à-dire $\{(t, X(t)) \mid t \in J\}$; ce sont des courbes de l'espace $\mathbb{R}^3$, et cela peut devenir très compliqué à visualiser, même pour des (ED) très simples.
Dans le cas des équations différentielles autonomes, il est plus parlant de représenter les *trajectoires* (ou *orbites*), c'est-à-dire les ensembles $\{X(t) \mid t \in J\}$; c'est d'ailleurs ce que nous avons fait dans le cas linéaire (chapitre 5).



Graphe d'une solution de $X(\cdot)$



Trajectoire (ou orbite) d'une solution

Figure 2

6.1.2 Les premières questions que l'on se pose à propos des équations différentielles ((ed) comme (ED))

— *Y-a-t-il* des solutions à (ed) ?
— Y-a-t-il des solutions au problème de CAUCHY ($\mathscr{C}$) ?
— Si oui, est-il possible de trouver des solutions sur « des intervalles les plus grands possibles » ? éventuellement, lorsque $\Omega = I \times \mathbb{R}$, sur tout l'intervalle I donné a priori ?
— *Unicité* de telles solutions (à intervalles de définition J fixés).

Exemple 6.1.2 Essayez de résoudre (explicitement) les équations différentielles scalaires suivantes :

$$x' = x^2 - t, \quad x' = \sin(tx), \quad x' = e^{tx} \dots$$

... si vous y arrivez, je vous promets une boîte de (bons) chocolats...

Pouvoir résoudre explicitement des équations différentielles non linéaires est plutôt rare ; ça existe surtout chez les professeurs qui doivent tester vos acquis... et poser des sujets d'examens.

— Comment *approcher* (ou *approximer*) la solution de ($\mathscr{C}$) lorsque celle-ci est unique ? Cela se fait par des méthodes numériques dont nous donnerons une (première) idée au chapitre suivant (chapitre 7).
— Comment obtenir des propriétés *qualitatives* des solutions (sans les calculer !) : sens de variation et convexité (dans le cas scalaire), comportement quand $t \to +\infty$ (lorsque la solution est définie sur $[a, +\infty[$ au moins), particularités comme la périodicité, etc. ?

6.1.3 Comment passer d'une équation différentielle scalaire du deuxième ordre à une équation différentielle vectorielle du premier ordre ?

C'est un procédé que nous avons vu à plusieurs reprises dans le cas d'équations différentielles linéaires ; nous le présentons une nouvelle fois.
Une équation différentielle scalaire du deuxième ordre est une « équation aux dérivées » du type

$$x'' = g(t, x, x'), \tag{ed}_2$$

où $g : (t, u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longmapsto g(t, u, v) \in \mathbb{R}$ est une fonction continue (au moins) sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$. Attention ici au fait que l'équation différentielle $(\text{ed})_2$ est *explicitée en* x'' (écriture $x'' =$ quelque chose), et que, contrairement à la situation décrite en (6.2), g est à valeurs réelles.
On cherche donc un couple (J, x) où : J est un intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$, $x : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur J, tels que :

$$\begin{cases} (t, x(t), x'(t)) \in \Omega \quad \text{pour tout} \in t \in J, \\ x''(t) = g(t, x(t), x'(t)) \quad \text{pour tout} \in t \in J. \end{cases}$$

La « forme déployée » de $(\text{ed})_2$ est celle qui consiste à considérer l'équation différentielle *vectorielle* vérifiée par $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$:

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ g(t, x(t), y(t)) \end{pmatrix} = F(t, X(t)),$$

avec

$$F : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(t, (u, v)) \longmapsto F(t, (u, v)) := \begin{pmatrix} v \\ g(t, u, v) \end{pmatrix}.$$

On s'est ainsi mis dans le format (6.2) avec une fonction F particulière construite à partir de g.
En conséquence, chaque fois qu'il y aura un résultat général relatif à (6.2), il faudra penser à transposer à $(\text{ed})_2$.
Il va sans dire qu'avec les hypothèses faites, une solution $x : J \longrightarrow \mathbb{R}$ de $(\text{ed})_2$ est deux fois continûment dérivable (au moins) sur J.

6.2 Exemples divers

6.2.1 Equations différentielles vectorielles linéaires

Ici, Ω est de la forme $I \times \mathbb{R}^2$, la fonction $F : (t, u, v) \in \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est définie par $F(t, u, v) = A(t) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b(t)$, avec $A : t \in I \longmapsto A(t) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ continue et $b : t \in I \longmapsto b(t) \in \mathbb{R}^2$ continue.
On a étudié ces équations au chapitre 4, du moins dans le cas particulier où A ne dépend pas de t.

6.2.2 Exemples historiques ou prototypes

Nous listons ci-dessous quelques équations différentielles non linéaires, soit en raison de leur importance pratique, soit pour le rôle de prototype (ou historique) qu'elles ont joué dans le développement de la connaissance du domaine.

• Equation du *pendule simple*.

$$J\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta,$$

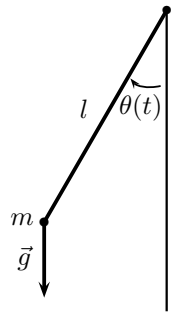


Figure 3

où $\theta(t)$ désigne la déviation angulaire par rapport à la verticale, et $J = ml^2$ le moment d'inertie. Après un changement de variables linéaire, on se ramène à

$$\ddot{\theta} + \sin\theta = 0. \qquad (\text{ed})_2$$

Sous forme vectorielle du premier ordre, cela devient

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases}, \qquad \left(X := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \right),$$

soit encore $\dot{X} = G(X)$, une équation différentielle autonome (*cf.* p. 144).

• Equation de *reproduction en régime de concurrence.*

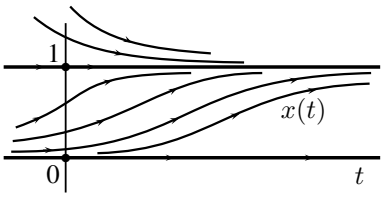


Figure 4

$x' = (a - bx)\,x$, $\quad x' = (1 - x)\,x$ en format simplifié

$$\big(x' = g(x)\big)\,.$$

Observer ici le rôle particulier des solutions constantes de l'équation différentielle : $x \equiv 0$, $x \equiv 1$ (0 et 1 sont les deux valeurs r pour lesquelles $g(r) = 0$).

• Système *prédateur-proie* de Lotka et Volterra (*circa* 1925).

$$\begin{cases} x' = kx - axy \\ y' = -lx + bxy. \end{cases}$$

• Equation de Van der Pol (1927)... non, celui-ci n'était pas un coureur cycliste belge...

$$x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = 0.$$

Cette équation intervient dans la théorie des oscillateurs auto-entretenus.

• Equation de Liénard (1928).

$$\begin{cases} x' = y - F(x) \\ y' = g(x) \end{cases},$$

qui équivaut à $x'' + f(x)x' - g(x) = 0$ lorsque $F'(x) = f(x)$ (contient donc Van der Pol).

• Equation de Duffing (1918).

$$x'' + \delta x' - x + x^3 = a\cos(\omega t).$$

• Equation de LORENZ (1963).

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = \rho x - y - xz \\ z' = xy - \beta z. \end{cases} \qquad \sigma, \beta, \rho \quad \text{paramètres} > 0.$$

C'est un des premiers exemples où apparaît ce qu'on appelle un « comportement chaotique » des solutions.

• Equation de MATHIEU.

$$x'' + (a + b\cos t)\, x = 0,$$

cas particulier de l'équation (dite) de HILL : $x'' + [a + bf(t)]\, x = 0$.

Les équations différentielles « spéciales » comme celles d'EULER, BERNOULLI, RICCATI, CLAIRAUT... (objets d'éventuels exercices) sentent les vieux chiffons et font (trop) appel à des « recettes de cuisine » de résolution qui masquent les vrais problèmes posés par les équations différentielles non linéaires. Nous partageons ce point de vue avec D.A.SANCHEZ lorsque celui-ci analyse la présentation des équations différentielles dans les livres d'enseignement.
D.A.SANCHEZ, *Review of ordinary differential textbooks*, American Math. Monthly (1998), pp. 377-383.

6.2.3 Exemples-Illustrations

Avant d'aborder toute théorie ou résultat général, nous examinons ci-dessous une série d'exemples simples *illustrant ce qu'on peut espérer ou ne pas espérer à propos des solutions d'une équation différentielle non linéaire*. Notamment, nous commenterons *les différences avec le monde linéaire* qui nous a occupé jusqu'au précédent chapitre.

Exemple 6.2.1

$$\begin{cases} x'(t) = 1 + x(t)^2 \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Pour des raisons qui seront expliquées plus loin, la fonction $x : t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longmapsto x(t) = \tan t$ est *la* solution « maximale » de ce problème de CAUCHY. A cause du terme $x(t)^2$ qui « tire très fort » la dérivée $x'(t)$ (bien plus que s'il y avait eu un terme $x(t)$), l'état $x(t)$ explose $(\longrightarrow +\infty)$ quand $t \underset{<}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$.
Sans la condition particulière $x(0) = 0$, les solutions de l'équation différentielle $x' = 1 + x^2$ sont

$$t \in \left]C - \frac{\pi}{2}, C + \frac{\pi}{2}\right[\longmapsto x(t) = \tan(t - C), \quad \text{où } C \in \mathbb{R}. \tag{6.3}$$

C'est une translatée de la solution précédente. Observer qu'il y a toujours « une constante libre C », mais ici a été perdue la structure d'espace vectoriel de l'ensemble des solutions (la constante C n'est plus « à l'extérieur » de l'expression de $x(t)$ comme c'était le cas pour les

équations différentielles linéaires).
De manière générale, le problème de CAUCHY

$$(\mathscr{C})\begin{cases} x'(t) = 1 + x(t)^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad ((t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R})$$

a une et une seule solution. En effet, on « ajuste » la constante C dans la formule (6.3) au-dessus, d'une et une seule façon :

$$\tan(t_0 - C) = x(t_0),$$

soit

$$C = t_0 - \arctan x_0 \quad \left(t_0 \text{ est bien dans l'intervalle } \left]C - \frac{\pi}{2}, C + \frac{\pi}{2}\right[\right).$$

Exemple 6.2.2

$$x'(t) = x(t)^2.$$

Les solutions de cette équation différentielle sont : la solution $x \equiv 0$, les solutions $x : t \in]-\infty, C] \longmapsto x(t) = \dfrac{1}{C-t}$, $\quad x : t \in]C, +\infty] \longmapsto x(t) = \dfrac{1}{C-t}$.
Mis à part la solution $x \equiv 0$, aucune des solutions n'est définie sur toute la droite réelle.
Observer comment les courbes représentatives des solutions (appelées courbes intégrales) partitionnent tout $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Dans cet exemple, l'équation différentielle est autonome ; conséquence : si on glisse la feuille où sont tracées les solutions vers la droite ou vers la gauche (parallèlement à l'axe des t), on voit les mêmes motifs...

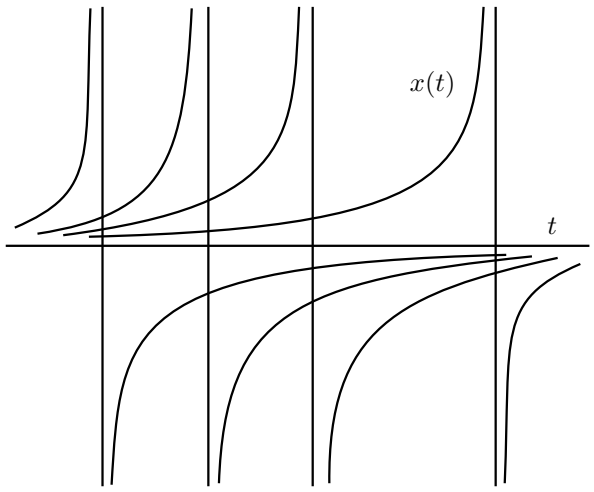


Figure 5

Mais si x est solution, Dx (où $D \in \mathbb{R}$) n'est plus solution ; pas plus qu'une somme de solutions n'est solution : on a perdu la structure d'espace vectoriel (des solutions) en quittant le monde linéaire !
Les solutions de l'équation différentielle se trouvent être croissantes, ce qu'on pouvait prévoir sans calcul ($x'(t) = x(t)^2 \geq 0$), mais ce n'est pas un hasard ; voir Théorème 6.3.3 plus loin.
Notons enfin que la « durée de vie » après t_0 de la solution ($x(t_0) = x_0$ étant la « condition initiale ») peut être très courte. Par exemple, la solution du problème de CAUCHY

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)^2 \\ x(0) = 10^6, \end{cases}$$

est $x : t \in \left]-\infty, 10^{-6}\right[\longmapsto x(t) = \dfrac{1}{10^{-6} - t}$; elle ne « vit » pas au-delà de la date 10^{-6} après $t_0 = 0$.

Exemple 6.2.3

$$(\mathscr{C}_1) \begin{cases} x'(t) = -2tx(t)^2 \\ x(0) = 1 \end{cases} ; \qquad (\mathscr{C}_2) \begin{cases} x'(t) = 2tx(t)^2 \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Nous avons affaire ici à deux problèmes de CAUCHY avec des équations différentielles non autonomes, et bien que ces équations différentielles se ressemblent beaucoup, les comportements des solutions respectives sont complètement différents.
Dans le premier cas, $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(t, u) = -2tu^2$; $(\mathscr{C}_1)$ admet une solution unique qui se trouve être définie sur toute la droite réelle, il s'agit de $t \in \mathbb{R} \longmapsto x(t) = \dfrac{1}{1 + t^2}$.
Dans le deuxième cas, $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(t, u) = 2tu^2$; $(\mathscr{C}_2)$ admet une et une seule solution « maximale » (= ce qu'on peut faire de mieux comme solution définie sur un intervalle), c'est

$$x : J =]-1, +1[\longmapsto x(t) = \frac{1}{1 - t^2}.$$

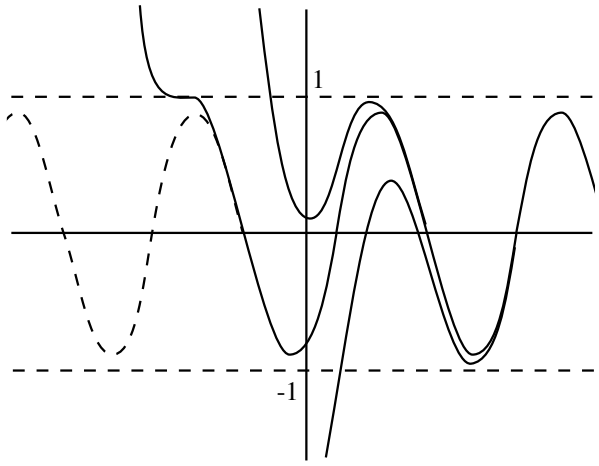
Exemple 6.2.4 Equation différentielle d'ABEL :

$$x'(t) = -x(t)^3 + \sin t. \tag{6.4}$$

Il est possible d'étudier « à la main » les propriétés qualitatives de cette équation différentielle. Les propriétés sont les suivantes :

(a) L'équation différentielle (6.4) n'a qu'une solution qui soit définie sur toute la droite réelle ; cette solution est périodique.
(b) Quand $t \longrightarrow +\infty$, toute solution finit par entrer dans la bande du plan limitée par -1 et $+1$.
(c) Quand $t \longrightarrow +\infty$, deux solutions x_1 et x_2 sont de plus en plus proches :

$$x_1(t) - x_2(t) \longrightarrow 0 \quad \text{quand}\, t \longrightarrow +\infty.$$



4 solutions, dont la périodique (partiellement en pointillé)

Figure 6

(d) Quand $t \longrightarrow -\infty$, toutes les solutions (exceptée la périodique) finissent par exploser : si x est une solution non périodique, il existe τ tel que

$$|x(t)| \longrightarrow +\infty \quad \text{quand}\, t \underset{>}{\longrightarrow} \tau.$$

Avouez que toutes ces propriétés ne se devinent pas à la seule vue de (6.4) !

Exemple 6.2.5

$$x'(t) = \frac{\cos^2 x(t)}{\cos^2 t}. \tag{6.5}$$

Dans cet exemple, Ω a une forme un peu spéciale :

$$\Omega = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[\times \mathbb{R}$$

(une réunion de bandes du type $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times \mathbb{R}$), et $f(t,u) = \dfrac{\cos^2 u}{\cos^2 t}$. Ici l'équation différentielle (6.5) n'est pas autonome, mais un certain nombre d'informations peuvent être tirées de la formulation même de (6.5) :

— Un intervalle maximal d'existence d'une solution est forcément contenu dans un des intervalles $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, $\quad k \in \mathbb{Z}$.

— Toutes les solutions sont des fonctions croissantes.

— Si $x : J \longrightarrow \mathbb{R}$ est une solution de (6.5), il en est de même de la « décalée » (dans le temps)

$$\begin{aligned} \tilde{x} : \tilde{J} := J + \pi &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \tilde{x}(t) = x(t - \pi). \end{aligned}$$

Cela se vérifie aisément. De ce fait, les solutions relatives à $\Omega_k = \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[\times \mathbb{R}$ sont des copies (translatées) des solutions relatives à $\Omega_0 = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times \mathbb{R}$.

— Si $x : J \longrightarrow \mathbb{R}$ est solution de (6.5), il en est de même de la « translatée à la verticale »

$$\begin{aligned} x^\star : J &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto x^\star(t) = x(t) + \pi. \end{aligned}$$

La vérification en est à nouveau immédiate. En conséquence, les solutions relatives à

$$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$$

sont des copies (translatées) des solutions relatives à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

— Il est facile d'exhiber quelques solutions particulières :

$$\begin{aligned} t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[&\longmapsto x(t) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{(des fonctions constantes)} ; \\ t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[&\longmapsto x(t) = t + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{(des fonctions affines).} \end{aligned}$$

Au vu des observations faites ci-dessus, il nous suffit donc d'étudier (6.5) sur le carré $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Les autres solutions de (6.5) se trouvent être

$$t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longmapsto x(t) = \arctan(\tan t + C), \quad C \in \mathbb{R} ;$$

c'est un excellent exercice de calcul sur les dérivées que de vérifier que de tels $x(\cdot)$ sont solutions de (6.5).

Exemple 6.2.6 Considérons le système différentiel non linéaire suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\,[-2 + 3y(t)] \\ y'(t) = y(t)\,[3 - x(t)]\,. \end{cases} \tag{6.6}$$

Il s'agit d'un système autonome du plan, et si l'on se réfère à notre format (*cf.* p. 144), $U = \mathbb{R}^2$ et

$$\begin{aligned} G : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\longmapsto G(u, v) = \begin{pmatrix} f(u, v) = u(-2 + 3v) \\ g(u, v) = v(3 - u) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

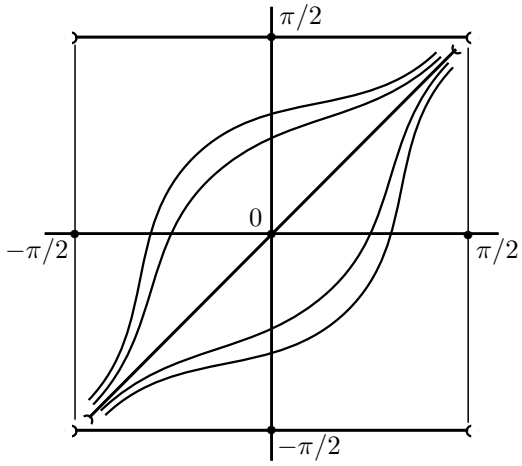
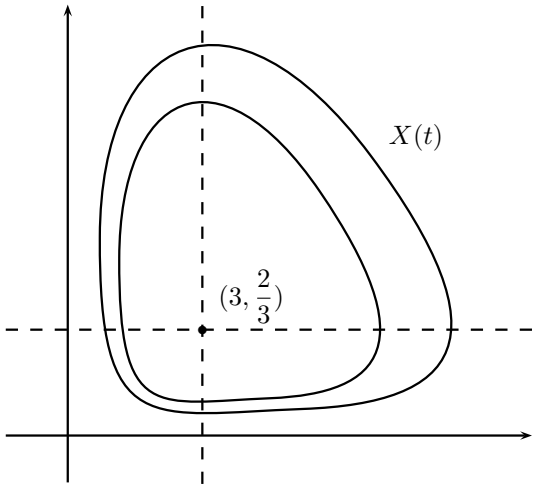


Figure 7

Il est difficile, sans travailler davantage, de dresser le portrait des trajectoires (ou orbites) des solutions de (6.6). Le point $(3, \frac{2}{3})$ est la seule solution de l'équation vectorielle $G(u, v) = 0$; donc la fonction

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) = 3 \\ y(t) = \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

est une solution constante de (6.6), la seule en fait.
Il se trouve que les solutions $X : J \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de (6.6), avec J intervalle maximal, sont définies sur toute la droite réelle (c'est-à-dire $J = \mathbb{R}$) et sont périodiques.



Exemple de trajectoires de solutions de (6.6)

Figure 8

6.3 Un résultat d'existence et d'unicité dans un problème de Cauchy scalaire

6.3.1 Prolongement - Maximalité

On dit que $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une solution *qui prolonge* une solution $\psi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ (de l'équation différentielle (ed)) lorsque $J \subsetneq I$ et $\varphi(t) = \psi(t)$ pour tout $t \in J$; bien entendu, ψ est alors une *restriction* de φ (Rappelons que I et J sont toujours des intervalles).
Une solution de (ed) n'admettant aucun prolongement est dite *maximale*. Dans le contexte d'équations différentielles linéaires, les données (les fonctions coefficients, les fonctions en second membre) étaient prises continues sur un intervalle ouvert (commun) I, et les solutions étaient définies sur *tout* I ; la question du prolongement ne s'y posait donc pas.

6.3.2 Un résultat d'existence et d'unicité de solutions

Avec des hypothèses réduites sur $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (la fonction qui « gouverne » l'équation différentielle, qui va dicter la dynamique ou évolution des solutions $x(\cdot)$), nous avons un résultat d'existence et d'unicité très puissant.

Théorème 6.3.1 (CAUCHY-LIPSCHITZ)[1] Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction (de deux variables) continûment différentiable sur Ω (c'est-à-dire, les deux fonctions dérivées partielles de f existent et sont continues sur Ω). Alors, pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, *il existe une et une seule solution maximale* du problème de CAUCHY

$$(\mathscr{C}) \begin{cases} x'(t) = f\,[t, x(t)] \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \qquad \text{(ed)}$$

solution définie sur un intervalle ouvert $J_{(t_0,x_0)}$.
Explicitons :

- Il existe un intervalle ouvert $J_{(t_0,x_0)}$ contenant t_0, une et une seule fonction $x : J_{(t_0,x_0)} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur cet intervalle, qui soit solution de (ed) et vérifie $x(t_0) = x_0$.
- Il n'y a pas moyen de faire mieux, c'est-à-dire de trouver un intervalle ouvert $K_{(t_0,x_0)} \supsetneq J_{(t_0,x_0)}$, une solution $y : K_{(t_0,x_0)} \longrightarrow \mathbb{R}$ de (ed) vérifiant $y(t_0) = x_0$, tels que y soit un prolongement de x.

L'énoncé de ce théorème (et ce que veulent dire les phrases qui s'y trouvent) doit être parfaitement assimilé. Il est recommandé au lecteur-étudiant de commencer par lire et contempler quelques instants ce théorème, de manière à bien se rendre compte de sa force.
Observons plus particulièrement les points suivants :

- Puisque t_0 est dans l'intervalle ouvert $J_{(t_0,x_0)}$, la solution du problème de CAUCHY $(\mathscr{C})$ est définie sur *au moins* $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]\,, \quad \alpha > 0$ (sur un petit bout de part et d'autre de t_0).
- Si vous, lecteur-étudiant, trouvez une solution $x_1 : J_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ au problème de CAUCHY $(\mathscr{C})$ $(t_0 \in J_1, x_1(t_0) = x_0)$, et que votre camarade a trouvé une autre solution $x_2 : J_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ au même problème de CAUCHY, alors elles admettent le même prolongement en solution maximale, c'est-à-dire qu'elles *coïncident* là où elles se comparent, c'est-à-dire sur $J_1 \cap J_2$.
  Cet aspect « existence et unicité locales dans un problème de CAUCHY » est ce que l'on démontre en premier ; l'aspect « existence et unicité globales » vient après.
- Les graphes des solutions de (ed) forment une *partition* de Ω.
- Prenons le cas particulier où $\Omega = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (la fonction f est donc continûment différentiable sur tout $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$). On a alors l'alternative suivante à propos des solutions maximales $x : J_{(t_0,x_0)} \longrightarrow \mathbb{R}$:
  — *« Explosion en temps fini »*, c'est-à-dire

$$J_{(t_0,x_0)} =]\ldots, b[\,, \quad x(t) \longrightarrow +\infty\,(\text{ou} -\infty)\,\text{quand}\,t \underset{<}{\longrightarrow} b.$$

  — *« Une vie jusqu'à l'infini »*, c'est-à-dire $J_{(t_0,x_0)} =]\ldots, +\infty[$, x est définie pour tout $t \geq t_0$.

Quant à savoir ce qui se passe concernant $x(t)$ lorsque $t \longrightarrow +\infty$, cela dépend beaucoup d'autres hypothèses faites sur la fonction f.

1. Dans certains pays, ce théorème porte d'autres noms : de PICARD-LINDELÖF en Allemagne par exemple. Eh oui, chaque équipe nationale de rugby défend sa deuxième ligne...

C'est le moment de revoir, à la lumière du Théorème 6.3.1, quelques exemples : Exemples 6.2.1, 6.2.2, 6.2.4.

Exemple 6.3.2 Dans une étude plus avancée (éventuelle), le lecteur-étudiant apprendra que ce n'est pas l'hypothèse « f continûment différentiable » qui est importante pour assurer un résultat d'existence et d'unicité de solutions comme dans le Théorème 6.3.1, mais bien : « f est continue, plus une dépendance lipschitzienne de f en la deuxième variable ». L'exemple qui suit permet de toucher du doigt la nécessité d'avoir une hypothèse sur f plus forte que la continuité si on veut s'assurer de l'unicité de la solution d'un problème de CAUCHY.
Considérons le problème de CAUCHY

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{|x(t)|} \\ x(t_0) = 0. \end{cases} \tag{6.7}$$

Ici, $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $f(t,u) = \sqrt{|u|}$ est continue, sans être continûment différentiable, sur Ω. Le problème de CAUCHY (6.7) a au moins deux solutions :

$$x_1 : t \ \in \mathbb{R} \longmapsto x(t) = 0,$$

$$x_2 : t \ \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{4}(t-t_0)^2 & \text{si } t \geq t_0, \\ -\dfrac{1}{4}(t-t_0)^2 & \text{si } t \leq t_0. \end{cases}$$

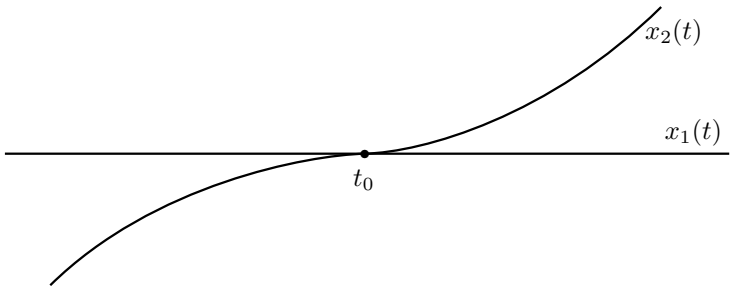


Figure 9

Esquisse de la démonstration du Théorème 6.3.1 (p. 155)
Nous nous contentons d'esquisser la démonstration de l'aspect « existence et unicité locales » du Théorème 6.3.1.

Etape 1 : Transformation du problème de CAUCHY en une « *équation (dite) intégrale* ».
Soit J un intervalle contenant t_0, et $x : J \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable tel que $(t, x(t)) \in \Omega$ pour tout $t \in J$.
Alors, x se trouve être solution du problème de CAUCHY

$$(\mathscr{C}) \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = f\,[t, x(t)] \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right.$$

si et seulement si

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\,[s, x(s)]\,\mathrm{ds} \quad \text{pour tout } t \in J. \tag{6.8}$$

La démonstration en est simple :

— De la relation $x' = f(t, x)$ on tire par intégration

$$x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} x'(s)\mathrm{ds} = \int_{t_0}^{t} f\,[s, x(s)]\,\mathrm{ds} \quad \text{pour tout } t \in J.$$

— Réciproquement, si x vérifie (6.8), on a :

- $x(t_0) = x_0$;
- $s \longmapsto f\,[s, x(s)]$ est continue sur J, de sorte que la fonction $t \in J \longmapsto \displaystyle\int_{t_0}^{t} f\,[s, x(s)]\,\mathrm{ds}$ a $f\,[t, x(t)]$ comme dérivée en $t \in J$.

L'intérêt de la traduction du problème de CAUCHY en « équation intégrale » (l'inconnue $x(\cdot)$ est à gauche mais aussi à droite sous le signe intégrale, dans (6.8)), est que l'intégration est un procédé plus stable que la dérivation dans les opérations de passage à la limite (en Analyse).

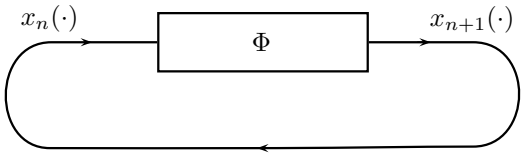
Etape 2 : Idée de la « *méthode des approximations successives* ».
Le lecteur-étudiant a probablement eu l'occasion d'étudier des suites de nombres réels construits de la manière suivante :

$$u_0 \text{ réel donné ; } u_{n+1} = \varphi(u_n) \quad \text{pour tout entier } n \geq 1,$$

où $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.
Si tout se passe bien, la suite (u_n) converge vers un point u vérifiant $\varphi(u) = u$, ce qu'on appelle un point fixe de φ.
C'est la même méthodologie qui est adoptée ici, pour une suite de *fonctions* cette fois-ci. Soit E l'espace des fonctions continues sur $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, muni de la norme $||\theta|| := \max\{|\theta(t)|, t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]\}$ ($\alpha > 0$ est un paramètre à régler, passons...). On considère alors

$$\begin{array}{rcl} \Phi \ : \ E & \longrightarrow & E \\ (\text{fonction } x) & \longmapsto & (\text{fonction } \Phi(x)) \\ & & \Phi(x) : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & [\Phi(x)]\,(t) := x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f\,[s, x(s)]\,\mathrm{ds}. \end{array}$$

$\Phi(x)$ est une nouvelle fonction de t, qui est bien dans E.
Trouver $x(\cdot)$ solution de (6.8) est donc trouver une fonction de E qui soit *point fixe* de l'application Φ ($\Phi(x) = x$, une *égalité entre fonctions*). On recherche une telle fonction par la méthode dite des « approximations successives » :



$$x_0(t) \equiv x_0; \quad x_{n+1}(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left[s, x_n(s)\right] \mathrm{ds}, \quad t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]\,. \tag{6.9}$$

Il y a ensuite tout un travail se basant sur les techniques et résultats d'Analyse pour montrer « qu'à la limite, quand $n \longrightarrow +\infty$ », on aboutit à (6.8) (majorer, choisir et gérer des constantes, se mettre en situation d'application d'un théorème de convergence).
Voyons sur un exemple simple comment le procédé fonctionne.
Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

dont la solution est connue, c'est $x : t \in \mathbb{R} \longmapsto x(t) = e^t$.
La suite de fonctions engendrée par le processus décrit en (6.9) est :

$$x_0(t) = 1, \quad x_1(t) = 1 + t, \quad x_2(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2}, \ldots, x_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{t^n}{n!}.$$

La suite (x_n) converge vers la fonction exponentielle $(x(t) = e^t)$ uniformément sur $[-\alpha, +\alpha]$.

6.3.3 Davantage sur les équations différentielles (scalaires) autonomes

Nous allons préciser un peu les choses dans le cas où les équations différentielles considérées sont autonomes

$$x'(t) = g\left[x(t)\right], \tag{6.10}$$

où $g : U \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue (au moins) sur un ouvert U de $\mathbb{R}$. Premières observations :

- Il peut y avoir des *solutions constantes*. En effet, si $c \in \mathbb{R}$ est tel que $g(c) = 0$, la fonction $x : t \in \mathbb{R} \longmapsto x(t) := c$ est solution de (6.10) (solution maximale bien sûr puisque $J = \mathbb{R}$).
- *Invariance par translation sur le temps* (« le décalage horaire n'affecte pas les équations différentielles autonomes »). De fait, si $x : J \longrightarrow \mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle (6.10), il en est de même de la fonction « décalée dans le temps (par h) »

$$\begin{aligned} \tilde{x} : \tilde{J} := J + h &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \tilde{x}(t) := x(t - h). \end{aligned}$$

La vérification en est très simple.
Cette observation permet de construire beaucoup de solutions de (6.10), parfois toutes, à partir d'*une seule* solution de (6.10). En glissant le long de l'axe des t la feuille sur laquelle vous avez tracé les graphes des solutions de (6.10), vous devez retrouver les mêmes courbes...

Théorème 6.3.3 Soit $x : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle autonome $x'(t) = g[x(t)]$, où $g : U \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continûment dérivable sur un ouvert U de $\mathbb{R}$. Alors, nécessairement, x est croissante sur J ou décroissante sur J.

Ce résultat (qualitatif), à défaut de valider des solutions, permet d'écarter des fonctions candidates à être des solutions. Une conséquence : il ne peut y avoir de solutions périodiques de (6.10), autres que des solutions constantes.
Le lecteur-étudiant s'est convaincu ou se convaincra à l'aide d'exemples que ce résultat de monotonie des solutions (Théorème 6.3.3) ne saurait être vrai dans le cas d'équations différentielles scalaires non autonomes $\big(x'(t) = f[t, x(t)]\big)$.

6.3.4 Un exemple de technique de résolution : le cas des équations différentielles dites « à variables séparables »

Il s'agit d'équations différentielles du type suivant :

$$x'(t) = g(t)h[x(t)], \tag{6.11}$$

où $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ (resp. $h : B \longrightarrow \mathbb{R}$) est une fonction continûment dérivable sur l'ouvert A de $\mathbb{R}$ (resp. sur l'ouvert B de $\mathbb{R}$).
Ces équations différentielles sont appelées « à variables séparables » car les contributions de t et de x sont « séparées » dans le second membre de (6.11) :

$$\begin{aligned} f(t, x(t)) &= g(t)h[x(t)] \\ \Omega = A \times B, f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, u) &\longmapsto f(t, u) = g(t)h(u). \end{aligned}$$

Il ne faut pas sous-estimer la généralité de (6.11), et donc les difficultés de résolution. Ces équations différentielles « à variables séparables » contiennent :

- Tous les calculs de primitives : $x'(t) = g(t)$ (avec g fonction continûment dérivable sur un ouvert A de $\mathbb{R}$) ; ils correspondent à $h \equiv 1$ dans (6.11).
- Toutes les équations différentielles (scalaires) autonomes : $x'(t) = h[x(t)]$; elles correspondent à $g \equiv 1$ dans (6.11).

Il ne faut donc pas espérer de miracles... Voyons ce qu'on peut dire :

- Si le réel $c \in B$ est tel que $h(c) = 0$, la fonction $t \in A \longmapsto x(t) = c$ est solution de (6.11).
- Si $x(\cdot)$, candidate potentielle à être solution de (6.11), prend ses valeurs dans un intervalle où h ne s'annule pas, (6.11) se réécrit en

$$\frac{x'(t)}{h[x(t)]} = g(t). \tag{6.12}$$

Si Φ est une primitive de $\dfrac{1}{h}$ (c'est-à-dire $\Phi'(v) = \dfrac{1}{h(v)}$), on reconnaît dans le membre de gauche de (6.12) la dérivée de la fonction composée $t \longmapsto \Phi\left[x(t)\right]$; pour continuer il faudra donc « primitiver » g.
Après ces explications, voici la « mécanique du calcul » (sorte de recette de cuisine) correspondante. On réécrit (6.11) avec les éléments différentiels $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}t$; le symbole $\displaystyle\int$ est là pour indiquer qu'on prend une primitive :

- $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g(t)h(x)$, d'où $\dfrac{\mathrm{d}x}{h(x)} = g(t)\mathrm{d}t$
- Puis,
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{h(x)} = \int g(t)\mathrm{d}t + C, \quad C \in \mathbb{R}$$
etc. Ensuite, on se débrouille pour s'en sortir...

En bref, il faut procéder par analyse-synthèse ; il sera nécessaire de voir sur quels *intervalles* (dépendant d'une constante C) sont définies les solutions, lesquelles s'expriment aussi en fonction de C.

Toutes les ressources (techniques, calculs, résultats) fournies par l'Analyse (du monde des fonctions numériques de la variable réelle) sont à activer pour résoudre effectivement (si cela est demandé expressément) les équations différentielles (scalaires) non linéaires.
Retenons prioritairement que toute cette section 3 est dominée par le Théorème 6.3.1 de Cauchy-Lipschitz.

Exemple 6.3.4 Illustration de la technique de résolution pour les équations différentielles « à variables séparables ».
Considérons l'équation différentielle suivante

$$x'(t) = -\frac{x(t)^3}{t^3}. \tag{6.13}$$

Ici,

$$\begin{array}{rcl} g : A = \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & g(t) = \dfrac{1}{t^3} \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rcl} h : B = \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & h(u) = -u^3. \end{array}$$

Enclenchons la « mécanique » du calcul explicitée plus haut :

- $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{x^3}{t^3}$, d'où $\dfrac{\mathrm{d}x}{x^3} = -\dfrac{\mathrm{d}t}{t^3}$
- Puis, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t^3} + C$, soit $-\dfrac{1}{2x^2} = \dfrac{1}{2t^2} + C \quad (C \in \mathbb{R})$, ou encore
$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{t^2} = D, \quad D \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, les solutions de (6.13) sont de la forme

$$x(t) = \pm\sqrt{\frac{t^2}{Dt^2 - 1}}, \quad t \in J = \text{ intervalle où } Dt^2 - 1 > 0. \tag{6.14}$$

Avec ça on est capable de se débrouiller... Par exemple, imaginons qu'on demande expressément *la* solution du problème de CAUCHY

$$\begin{cases} x'(t) = -\dfrac{x(t)^3}{t^3} \\ x(1) = 1. \end{cases} \tag{6.15}$$

Avec l'information fournie en (6.14) et ce que dit le Théorème 6.3.1 de CAUCHY-LIPSCHITZ, on arrive à ceci : *La* solution du problème de CAUCHY (6.15) est

$$\begin{array}{rcccl} x & : & J = \left]\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & x(t) = \sqrt{\dfrac{t^2}{2t^2-1}}. \end{array}$$

Les exemples de 6.2.1, 6.2.2, 6.2.3 et 6.2.5 peuvent être traités avec cette méthode.

6.4 Systèmes différentiels non linéaires du plan, notamment autonomes

6.4.1 Un résultat d'existence et d'unicité dans un problème de Cauchy vectoriel

Dans ce court paragraphe, nous revenons au cas vectoriel, en nous limitant au cas du plan (c'est-à-dire $n = 2$, l'équation différentielle vectorielle consiste en la conjonction de deux équations différentielles scalaires non linéaires) :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = f\left[t, x(t), y(t)\right] \\ y'(t) = g\left[t, x(t), y(t)\right], \end{array} \right. \tag{ED}$$

résumé en $X'(t) = F\left[t, X(t)\right]$, avec

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \text{et } F(t,u,v) = \begin{pmatrix} f(t,u,v) \\ g(t,u,v) \end{pmatrix}.$$

Il contient le cas dit linéaire

$$X'(t) = A(t)X(t) + b(t), \tag{EDL}$$

où $A : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $b : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sont continues sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$.
Comme sous-cas, nous avons celui où A ne dépend pas de t, largement abordé aux chapitres 4 et 5.
Les définitions du § 6.3.1 (prolongement, maximalité des solutions) et le résultat d'existence et d'unicité de solutions sont les mêmes, mutatis mutandis, que dans le cas scalaire (§ 6.3.2).

Théorème 6.4.1 (Cauchy-Lipschitz) Soit $F : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle continûment différentiable sur Ω (c'est-à-dire, les deux fonctions composantes de F, f et $g : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, sont continûment dérivables sur Ω). Alors, pour tout $(t_0, X_0 = (x_0, y_0)) \in \Omega$, *il existe une et une seule solution maximale* du problème de Cauchy

$$(\mathscr{C}) \left\{ \begin{array}{l} X'(t) = F\left[t, X(t)\right] \\ X(t_0) = X_0 \end{array} \right. ,$$

solution définie sur un *intervalle ouvert* $J_{(t_0,X_0)}$.
Dans le cas linéaire, la solution du problème de Cauchy est définie sur tout I (c'est-à-dire, $J_{(t_0,X_0)} = I$ pour tout jeu de données (t_0, X_0)).

6.4.2 Davantage sur les systèmes différentiels autonomes du plan

Dans ce sous-paragraphe, nous allons être un peu plus précis qu'au sous-paragraphe précédent car $F(t,u,v) = G(u,v)$ n'y dépend pas de t :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = f\left[x(t), y(t)\right] \\ y'(t) = g\left[x(t), y(t)\right] \end{array} \right. , \tag{6.16}$$

résumé en $X'(t) = G[X(t)]$. Ici, $G = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est continûment différentiable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ (G est appelé parfois « champ de vecteurs »).

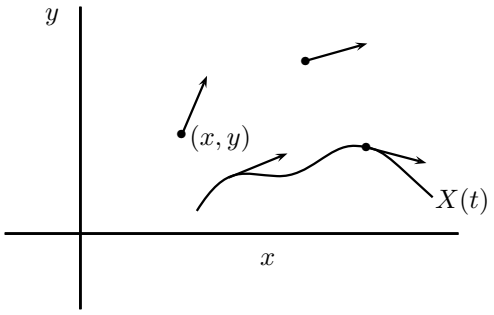


Figure 10

Figure 10 : En tout point (x, y) de U, le vecteur ↗ indique $G(x, y)$; donc si $(x(t), y(t))$ se trouve en (a, b) à la date t, le vecteur vitesse de X à la date t, $X'(t) = G[X(t)]$, sera $G(a, b)$. Imaginons qu'on soit à la surface de l'Océan atlantique, que G désigne le champ des courants marins ; si je pose mon béret (insubmersible) en X_0 à la date t_0, comment dérivera-t-il au fil de l'eau ? La trajectoire du béret sera gouvernée par l'équation différentielle (6.16).
Le cas linéaire, $X'(t) = AX(t)$, a été étudié au chapitre 4 ; une certaine classification des trajectoires a même été opérée au chapitre 5.
Si nous passons un peu de temps sur le cas autonome (par rapport au § 6.4.1), c'est qu'il y a des choses spéciales à dire. Par exemple :

— Il peut y avoir des *solutions constantes* à (6.16) (vectorielles, bien sûr). En effet, si $(a, b) \in U$ vérifie $G(a, b) = 0$, la fonction constante

$$X : t \in \mathbb{R} \longmapsto X(t) := (a, b)$$

est solution de (6.16). Sa trajectoire est réduite au point de coordonnées (a, b) (en bref, « j'y suis, j'y reste »).
— Il peut y avoir des *solutions périodiques* (non constantes), ce qui ne se produisait pas dans le cas scalaire (*cf.* Théorème 6.3.3), nous en avons vu des exemples dans le cas linéaire (*cf.* § 5.2.2 du chapitre 5) et non linéaire (*cf.* Exemple 6.2.6 du présent chapitre).

Les résultats principaux sont résumés dans le théorème qui suit.

Théorème 6.4.2 (i) Si $X : J \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une solution maximale de l'équation différentielle (6.16), alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$, la « fonction décalée » (dans le temps) $X_h(t) := X(t-h)$ est aussi une solution maximale, définie cette fois sur l'intervalle « décalé » $J + h$.

(ii) Soit $X : J \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une solution maximale de (6.16) ; supposons $X(t_1) = X(t_2)$ pour un couple t_1, t_2 de J, avec $t_1 < t_2$ par exemple (c'est-à-dire, le « mobile $X(t)$ » passe au même point du plan à deux dates différentes t_1 et t_2). Alors, X est *périodique*, sur $J = \mathbb{R}$, et $T := t_1 - t_2$ est *une période* de X (peut-être pas la plus petite).

(iii) Soit $X : J_1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et $Y : J_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ deux solutions maximales, telles que les trajectoires de X et Y aient un point en commun. Alors, ces trajectoires sont égales et, en fait, $Y = X_h$ pour un certain $h \in \mathbb{R}$.

C'est un énoncé facile à comprendre et à retenir... Mais attention, le théorème ne dit pas qu'il n'y a que ce type de trajectoires pour (6.16) !
Les solutions maximales qui repassent au même endroit sont donc périodiques ; on les appelle des *cycles* ; les trajectoires-cycles sont des courbes fermées (contenues dans $U \subset \mathbb{R}^2$). Le cas limite est celui où la trajectoire est réduite à un point (a, b).

Démonstration (succincte) du Théorème 6.4.2 : Elle repose entièrement sur les résultats du Théorème 6.4.1 (existence et unicité de solutions maximales pour (6.16)).

Point (i) : On constate que pour tout $t \in J + h$ (et donc $t - h \in J$),

$$X_h'(t) = X'(t-h) = G\left[X(t-h)\right] = G\left[X_h(t)\right].$$

Ainsi, X_h est solution de $Y' = G[Y]$ (l'équation différentielle (6.16)).
Soit Y une solution prolongeant X_h (if any !) ; alors Y_{-h} est à son tour une solution prolongeant X (est-ce clair ?). Comme X a été supposée maximale, $Y_{-h} = X$. Par suite, $Y = X_h$ (d'accord ?), c'est-à-dire : X_h est une solution maximale.

Point (ii) : Supposons $X(t_1) = X(t_2)$, avec $t_1 < t_2$ dans J. Alors, la « fonction décalée » $X_{t_2-t_1}$ est encore solution maximale (*cf.* Point (i) au-dessus), et il se trouve que $X_{t_2-t_1}(t_2) = X(t_1) = X(t_2)$. En raison du Théorème 6.4.1 d'existence et – surtout – *d'unicité* de solutions de problèmes de CAUCHY, il s'ensuit que $X_{t_2-t_1} = X$. Ceci montre que pour tout $t \in J$, intervalle de définition de (la solution maximale) X, on a

$$X(t - T) = X(t), \quad \text{où } T := t_2 - t_1.$$

En particulier, J est invariant par translation $t \longmapsto t - T$; donc (l'intervalle) J ne peut être que $\mathbb{R}$ tout entier (d'accord ?).

Point (iii) : Supposons $X(t_1) = Y(t_2)$ pour un jeu de dates : t_1, t_2. Alors, la fonction $X_{t_2-t_1}$ est une solution maximale vérifiant $X_{t_2-t_1}(t_2) = X(t_1) = Y(t_2)$. Donc, toujours en raison du Théorème 6.4.1, $Y = X_{t_2-t_1}$. □

Remarque 4.3. Signalons le résultat quelque peu surprenant que voici. Supposons que dans le système (6.16) la fonction G soit lipschitzienne sur U, c'est-à-dire : il existe $L > 0$ telle que

$$||G(u,v) - G(u',v')|| \leq L||(u,v) - (u',v')|| \text{ pour tout } (u,v) \text{ et } (u',v') \text{ dans } U. \qquad (6.17)$$

Soit alors X une solution périodique non constante de (6.16) (s'il y en a !). Alors, la période T de X ne peut être « trop petite » :

$$T \geq \frac{2\pi}{L}. \tag{6.18}$$

Ce résultat est dû à J.A YORKE (1969).
Notons avec l'exemple simple

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \tag{6.19}$$

qu'on ne peut faire mieux comme minoration dans (6.18). En effet, $G(u,v) = \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$ avec une constante de Lipschitz $L = 1$, tandis que les solutions de (6.19), $t \in \mathbb{R} \longmapsto X(t) = \begin{pmatrix} A\cos t + B\sin t \\ A\sin t - B\cos t \end{pmatrix}$, sont périodiques de période $T = 2\pi$.

Exemple 6.4.3 (Dynamique des populations)
Les équations différentielles sont utilisées pour modéliser l'évolution (avec le temps t) de populations $x(t), y(t)$, etc. Un grand classique du domaine est donné par les équations de LOTKA-VOLTERRA, modélisant une situation de proies-prédateurs.
On note $x(t)$ la concentration de prédateurs et $y(t)$ la concentration de proies. L'évolution de $x(t)$ et $y(t)$ est gouvernée par le système différentiel autonome du plan suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t) \\ y'(t) = -cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases}, \tag{6.20}$$

où a, b, c, d sont des coefficients réels strictement positifs. Ceux-ci s'interprètent de la façon suivante : a est un taux de reproduction pour les proies, b est un taux de prédation ; c est un taux de mortalité pour les prédateurs et d est un taux de reproduction pour les prédateurs. On observera que la non linéarité dans (6.20) n'est pas très « violente », c'est le produit $x(t)y(t)$ qui est la cause de cette non linéarité.
Que dire des solutions du problème de CAUCHY ?

$$(\mathscr{C}) \begin{cases} (6.20) \\ x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0 \ ? \end{cases} \tag{6.21}$$

- Il y a deux solutions constantes à (6.20) (« j'y suis, j'y reste ») :

$$(x(t), y(t)) = (0,0) \quad \text{et} \quad (x(t), y(t)) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right).$$

- Si $y_0 = 0$ et $x_0 \neq 0$, la solution du problème de CAUCHY (6.21) est

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{pmatrix} x(t) = x_0 e^{at} \\ y(t) = 0 \end{pmatrix}.$$

  De manière symétrique, si $x_0 = 0$ et $y_0 \neq 0$, la solution du problème de CAUCHY (6.21) est

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{pmatrix} x(t) = 0 \\ y(t) = y_0 e^{-ct} \end{pmatrix}.$$

- Si $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$ (qui est le cas d'intérêt), la solution maximale $X : t \in J_{(x_0,y_0)} \longmapsto X(t) = (x(t), y(t))$ du problème de CAUCHY (6.21) vérifie :

$$x(t) > 0 \text{ et } y(t) > 0 \text{ pour tout } t \in J_{(x_0,y_0)}.$$

En effet, en raison du Théorème 6.4.1, la trajectoire de X ne peut croiser les axes d'équation $x = 0$ ou $y = 0$. Quelques solutions sont représentées sur la Figure 11.

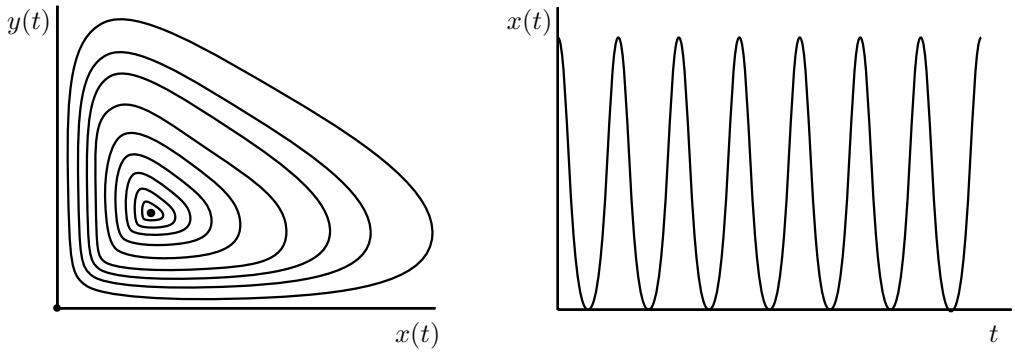


Figure 11. Quelques trajectoires. Paramètres $a = 2,\ b = 1,\ c = 1,\ d = 2$

- Si $X(t) = (x(t), y(t))$ est une solution périodique de (6.20), vérifiant par exemple $X(0) = X(T)$, alors

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{dt} = \frac{c}{d}, \quad \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\mathrm{dt} = \frac{a}{b}, \tag{6.22}$$

bref les moyennes de $x(t)$ et de $y(t)$ sur une période sont les coordonnées du « point central » $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$. Cela est facile à démontrer à partir de (6.20). Par exemple :

$$\frac{x'}{x} = a - by, \quad \text{d'où } \int_0^T \frac{x'}{x}\mathrm{dt} = \int_0^T (a - by)\,\mathrm{dt},$$

d'où

$$(0 =) \quad \ln x(T) - \ln x(0) = aT - b\int_0^T y(t)\mathrm{dt}.$$

- Les solutions $X(t) = (x(t), y(t))$ de (6.20) vivent sur les courbes du plan d'équations

$$x^c y^a e^{-dx} e^{-by} = K$$

où $K > 0$. C'est en effet une simple conséquence du fait que la fonction

$$t \in J \longmapsto \theta(t) := x(t)^c y(t)^a e^{-dx(t)} e^{-by(t)}$$

a une dérivée nulle.

Chapitre 7

Premiers pas dans l'approximation numérique des solutions d'équations différentielles : la méthode d'Euler

« Nous devons nous contenter d'améliorer indéfiniment nos approximations... ».

K. Popper, *L'univers irrésolu...*, Hermann (1974)

Sommaire

7.1 La méthode d'Euler 169
7.2 Des méthodes numériques plus précises 173
7.3 Un mot des logiciels 175

Nous avons déjà dit que, pour la plupart des équations différentielles, les solutions ne s'expriment pas à l'aide des fonctions (élémentaires) que vous connaissez. Pourtant, pour de telles équations, les logiciels graphiques adaptés permettent de tracer des courbes qui sont censées représenter des approximations précises des solutions.
Comment procèdent-ils ?
La réponse à cette question réside dans les *méthodes numériques*, grâce auxquelles les programmes codés sur ordinateurs calculent de proche en proche des approximations de solutions. Le sujet est vaste, pas vraiment accessible à des débutants ; nous nous contenterons d'en exposer des éléments d'introduction assez élémentaires. Ce court chapitre est inspiré de [HW, ch. 3].

7.1 La méthode d'Euler

7.1.1 Présentation

C'est la méthode d'approximation de solutions d'équations différentielles la plus simple, la plus grossière aussi... elle est présentée ici pour son rôle conceptuel d'*explication des idées de base* d'un schéma d'approximation.
Nous cherchons à approcher la solution u du problème de Cauchy suivant

$$(\mathscr{C}) \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = f\left(t, x(t)\right) \\ x(t_0) = x_0, \end{array} \right.$$

sur $[t_0, t_f]$ par exemple. Nous ne connaissons pas $u(t)$ (sauf en t_0, bien sûr), mais nous savons que $u'(t_0) = f\left(t_0, u(t_0)\right)$ $(= f(t_0, x_0))$. Si t est augmenté d'un petit pas $h > 0$, le graphe de la solution u reste proche de sa tangente en t_0 (du moins on peut l'espérer). Si on suit cette tangente, on aboutit à

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = t_0 + h, \\ x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0). \end{array} \right. \tag{7.1}$$

Ensuite, on recommence en partant du point (t_1, x_1) (utilisant le substitut $f(t_1, x_1)$ au lieu du vrai $u'(t_1) = f\left(t_1, u(t_1)\right)$), et on arrive à un point

$$\left\{ \begin{array}{l} t_2 = t_1 + h, \\ x_2 = x_1 + hf(t_1, x_1). \end{array} \right. \tag{7.2}$$

Et ainsi de suite.
L'approximation (dite) d'Euler u_h de la (vraie) solution u est la fonction affine par morceaux dont le graphe (= ligne polygonale) passe par tous ces points (t_i, x_i).

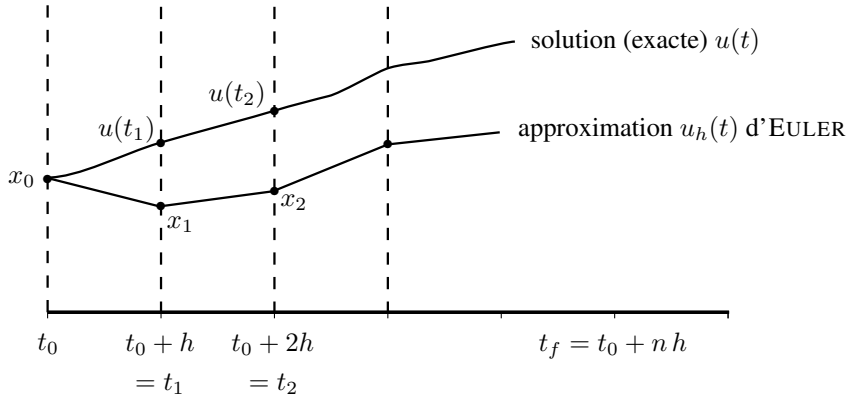


Figure 1

Formalisons ce qui a été dit.

Définition 7.1.1 Etant donné un pas $h > 0$ (fixé pour simplifier les choses), on définit une suite de points (t_i, x_i) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, 2, \ldots, \quad & t_i := t_{i-1} + h = t_0 + ih \\ & x_i := x_{i-1} + hf\,(t_{i-1}, x_{i-1})\,. \end{aligned}$$

L'approximation d'EULER u_h est la fonction définie par

$$u_h(t) := u_i + (t - t_i) f\,(t_i, x_i) \quad \text{pour}\, t \in [t_i, t_{i+1}]\,.$$

7.1.2 Les questions que, naturellement, on se pose

• Dès la première étape, x_1 est-elle une approximation « raisonnable » de $u(t_1)\,(= u(t_0 + h))$? Comme souvent dans de pareils contextes, la réponse est fournie par les (différentes) formules de TAYLOR. Si on suppose par exemple que u est deux fois continûment dérivable, on a

$$\underbrace{u(t_0 + h)}_{\text{vraie valeur de } u \text{ en } t_1} = \underbrace{x_0 + hf\,(t_0, x_0)}_{\text{approximation proposée}} + \frac{h^2}{2} u''\,(t_0 + \theta h) \tag{7.3}$$

pour un certain $\theta \in]0, 1[$. Si u'' est bornée (par M), $|x_1 - u\,(t_0 + h)\,|$ est majorée par $M\dfrac{h^2}{2}$.

• *Et les coups suivants ?*
On a encore

$$u\,(t_1 + h) = u(t_1) + hf\,(t_1, u(t_1)) + \frac{h^2}{2} u''\,(t_1 + \theta_1 h)$$

pour un certain $\theta_1 \in]0, 1[$. Mais, ne connaissant pas $u(t_1)$ (la vraie valeur de la solution u en t_1), on la remplace par x_1, approximation calculée au coup précédent. D'où accumulation d'erreurs...

• *Que peut-on espérer ?*
Si « tout se passe bien », quand $h \longrightarrow 0$, l'approximation u_h tend vers u, c'est du moins ce qu'on peut espérer... Pour fixer les idées, soit $t_f (> t_0)$ en lequel on veut approcher $u(t_f)$. En n pas de longueur $h \left(= \dfrac{t_f - t_0}{n} \right)$, on part de x_0 et on arrive à $x_n = [1^{er}\,\text{résultat}]$. En remplaçant h par $\dfrac{h}{2}$, en $2n$ pas, on arrive à $x_{2n} = [2^{e}\,\text{résultat}]$; etc. Si « tout se passe bien », la suite $x_n, x_{2n}, \ldots, x_{kn}, \ldots$ tend vers $u(t_f)$ quand $k \longrightarrow +\infty$.

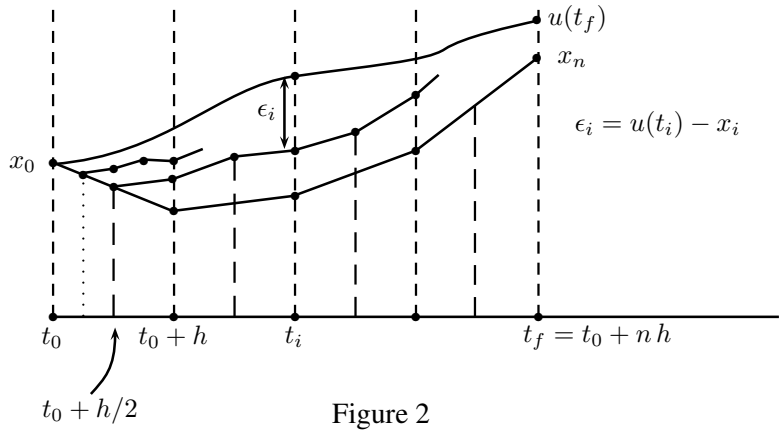


Figure 2

Tout cela suppose qu'on démontre des résultats de convergence (= des théorèmes), et, aussi important sinon plus, qu'on exhibe des majorations calculables (en fonction de h) des écarts entre les vraies valeurs $u(t_i)$ et les approximations proposées x_i.

7.1.3 Exemples

Exemple 7.1.2 Considérons

$$(\mathscr{C}) \begin{cases} x'(t) = \sin\left[tx(t)\right], \\ x(0) = 3. \end{cases}$$

On veut approcher (avec le schéma d'EULER) la valeur de la solution u de $(\mathscr{C})$ au point $t_f = 0,4$. La méthode itérative décrite à la Définition 7.1.1 est facile à programmer ; résultats :

- avec un pas $h = 0,1$, on obtient $x_4 = 3,16642$;
- avec un pas $h = 0,05$, on obtient $x_8 = 3,19227$.

Ce n'est pas trop mal puisque la valeur exacte de la solution de $(\mathscr{C})$ en $t_f = 0,4$ est $\simeq 3,2172$.

Exemple 7.1.3 L'équation qui régit votre avoir placé en banque (if any !) avec un taux d'intérêt fixe est

$$(\mathscr{C}) \begin{cases} x'(t) = rx(t) \qquad (r > 0 \text{ fixe}) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Ici nous connaissons l'expression explicite de la solution, c'est $x(t) = x_0 e^{rt}$.
Voyons ce que donne le schéma d'approximation d'EULER pour approcher $u(1)$ avec comme pas $h = \dfrac{1}{n}$. On obtient :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \frac{r}{n}x_0 = \left(1 + \frac{r}{n}\right) x_0, \\ x_2 &= x_1 + \frac{r}{n}x_1 = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^2 x_0, \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + \frac{r}{n}x_{n-1} = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n x_0. \end{aligned}$$

Quand $h \longrightarrow 0$ (c'est-à-dire $n \longrightarrow +\infty$), la valeur approchée fournie $\left(1 + \dfrac{r}{n}\right)^n x_0$ tend vers $e^r x_0$ (= la vraie valeur).

Exemple 7.1.4 Qu'est-ce que le schéma d'approximation d'EULER lorsque le problème de CAUCHY considéré n'est qu'un calcul d'intégrale ?
Imaginons qu'on ait à résoudre

$$(\mathscr{C}) \begin{cases} x'(t) = g(t) & (g : [t_0, t_f] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue}) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

La solution de $(\mathscr{C})$ est fournie (théoriquement) par

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(s)\mathrm{ds} \quad [\text{c'est la primitive de } g \text{ prenant en } t_0 \text{ la valeur } x_0]\,. \tag{7.4}$$

Appliquons la méthode d'EULER pour obtenir une approximation de u en $t_f (> t_0)$ fixé, avec un pas $h := \dfrac{t_f - t_0}{n}$. Cela donne

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + hg(t_0), \\ x_2 &= x_1 + hg(t_1) = x_0\,[g(t_0) + g(t_1)] \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + hg(t_{n-1}) = x_0 + h\,[g(t_0) + g(t_1) + ... + g(t_{n-1})]\,. \end{aligned}$$

Le lecteur-étudiant reconnaît (peut-être) en x_n une somme de RIEMANN,

$$h\,[g(t_0) + g(t_1) + ... + g(t_{n-1})]\,,$$

approximation de l'intégrale

$$u(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t_f} g(s)\mathrm{ds}.$$

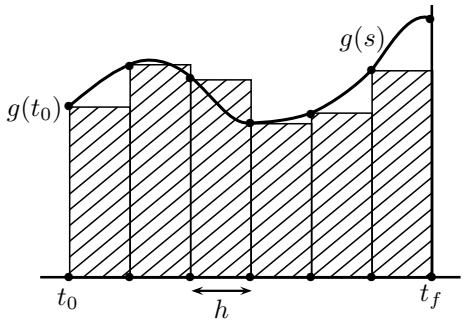


Figure 3

7.1.4 Ordre de grandeur de l'erreur

Soit $u(t_f)$ la vraie valeur de la solution du problème de CAUCHY

$$(\mathscr{C})\begin{cases} x'(t) = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

en $t_f (> t_0)$, soit x_h l'approximation obtenue pour $u(t_f)$ en utilisant la méthode d'EULER avec un pas $h\left(=\dfrac{t_f - t_0}{n}\right)$.
L'« erreur » est $E(h) := u(t_f) - x_h$. Un travail d'analyse (assez approfondi) pour estimer $E(h)$ conduit au résultat suivant :

$$\underline{E(h) \simeq C_E h.} \tag{7.5}$$

L'ordre d'approximation est, convenons-le, grossier. Faut-il donc utiliser la méthode d'EULER dans la pratique ? Réponses :

- oui pour quelques exemples d'illustration académique ; l'intérêt de la présentation de la méthode d'EULER est *conceptuel*, dans l'*idée d'approximation* qu'elle véhicule ;
- surtout pas en pratique, de manière routinière ; il y a mieux à faire à peu de frais (*cf.* infra).

7.2 Des méthodes numériques plus précises

Des méthodes numériques très classiques utilisent une technique calquée sur la méthode d'EULER. Ayant fixé un pas $h > 0$, on itère à partir des données initiales (t_0, x_0) de la manière suivante :

$$(\mathscr{C})\begin{cases} t_{i+1} = t_i + h, \\ x_{i+1} = x_i + hm. \end{cases} \tag{7.6}$$

La quantité m peut être assimilée à une *pente* moyenne sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$. Dans la méthode d'EULER, m est simplement la pente $f(t_i, x_i)$ au point (t_i, x_i) (extrémité gauche du

segment). On peut faire mieux. Dans la *méthode (dite) du point milieu*, on prend pour m la valeur de f au milieu du segment joignant (t_i, x_i) à $(t_i + h, x_i + hf(t_i, x_i))$, soit

$$m_M = f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} f(t_i, x_i)\right) \tag{7.7}$$

(d'où son nom !).
Les méthodes de C.RUNGE et W.KUTTA, les plus employées dans la pratique, utilisent pour m une moyenne pondérée des valeurs de f en 4 points voisins de (t_i, x_i) ; elles approchent les solutions d'équations différentielles d'une manière considérablement plus précise que la méthode d'EULER ou du point milieu ; leur étude relève d'un domaine des Mathématiques appliquées, appelé Analyse numérique.
Pour ce qui est de l'ordre de grandeur des erreurs,

— pour la méthode du point milieu

$$E(h) \simeq C_M h^2; \tag{7.8}$$

— pour des méthodes de RUNGE et KUTTA

$$E(h) \simeq C_{RK} h^4. \tag{7.9}$$

Pour terminer, voici le résultat de l'approximation par la méthode du point milieu des solutions des deux problèmes de CAUCHY suivants :

$$\begin{cases} x'(t) = \sin[tx(t)] \\ x(0) = 3\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} x'(t) = \sin[tx(t)] \\ x(0) = 2,8. \end{cases}$$

Ici $t_0 = 0$, $h = 0,05$ et t_f va jusqu'à 4.
Par exemple, quand on réduit h, la valeur approchée en $t_f = 0,4$ « se stabilise » à 3,2172 (comparer avec le résultat obtenu en p. 171).

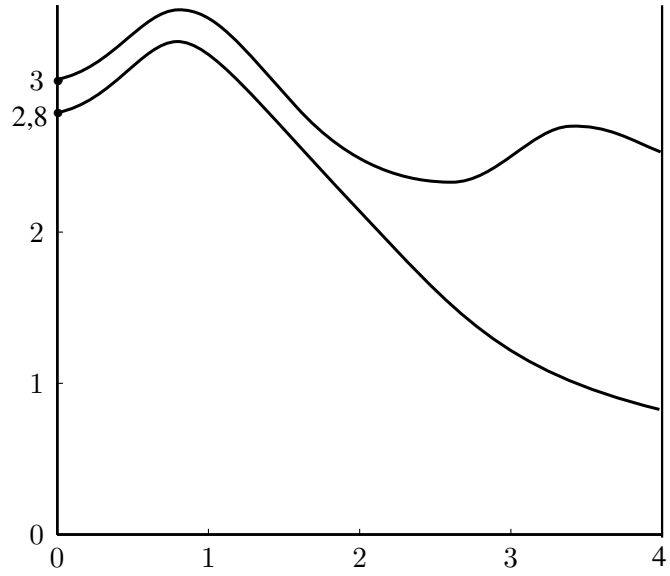


Figure 4

7.3 Un mot des logiciels

Il y a de multiples logiciels de résolution d'équations différentielles, intégrés le plus souvent dans des bibliothèques (Mathematica, Maple, Matlab, Scilab, etc.). Ils sont de deux sortes :

— des algorithmes de calcul formel, qui produisent, pour certains types d'équations, une solution explicite à l'aide des fonctions élémentaires ou de certaines fonctions spéciales ;

— des algorithmes de calcul numérique, qui fournissent des valeurs approchées de la solution en un nombre fini de points, ce qui permet ensuite, le cas échéant, de définir par interpolation une solution globale approchée.

Vignette historique

Nous présentons un raccourci de l'histoire du développement des équations différentielles, du XVII^e siècle au XX^e siècle.

• **XVII^e siècle**. Ca a démarré avec NEWTON et ses successeurs immédiats, à la suite du développement du *calcul infinitésimal*. NEWTON a considéré les équations différentielles du 1^{er} ordre dans sa *Méthode des fluxions et des suites infinies* (rédigée en 1671, mais publiée seulement en 1736). Les équations différentielles étaient appelées à l'époque « relations entre fluxions et quantités fluentes ». FERMAT avait fait allusion à un problème d'équation différentielle (« le problème inverse des tangentes ») sans en dire plus.

• **XVIII^e siècle**. Ce siècle voit l'ère d'un développement interne des équations différentielles. Sont résolues, plus ou moins explicitement, un grand nombre d'équations différentielles émanant essentiellement des Sciences comme l'Astronomie et la Physique (ou Mécanique). Tous les grands mathématiciens de ce siècle se sont intéressés aux équations différentielles (CLAIRAUT, d'ALEMBERT, LAGRANGE, LAPLACE, RICCATI et -comment l'éviter- EULER). Le « calcul intégral » y joue un rôle important.

• **XIX^e siècle**. La première moitié du siècle voit « une construction » de l'Analyse, avec GAUSS, BOLZANO... Une nouvelle ère est ouverte par CAUCHY. C'est en ce siècle qu'on assiste au début des études qualitatives des solutions, de leur existence et de leur unicité.

• **XX^e siècle**. Le XX^e siècle voit l'introduction des méthodes de l'Analyse fonctionnelle (ou méthodes topologiques) pour des études qualitatives approfondies des solutions. C'est aussi le siècle du développement massif des méthodes numériques de résolution d'équations différentielles, aidé et stimulé en cela par des ordinateurs de plus en plus puissants.

Références

Comme cela a été dit dans l'avant-propos, il y a beaucoup d'ouvrages sur les équations différentielles, de tous les niveaux. Pour l'échantillon très réduit que nous avons choisi, voici quelques commentaires :

- [L] et [S] sont des exemples de présentation à un niveau de débutants, comme nous avons voulu le faire ici.
- [FFJ] et, à un degré moindre, [R], présentent une multitude de situations de modélisation conduisant à des équations différentielles.

Pour les ouvrages de niveau élémentaire, nous partageons l'analyse de D.Sanchez [S2]. Cet auteur, à la fin de [S2], commente brièvement le contenu de vingt-six livres sur le sujet.

- [C] et [HW] sont de niveau plus élevé, abordables après la lecture-étude du présent ouvrage par exemple.
- [ACHU] contient une série d'exercices et problèmes corrigés, regroupés en trente-six « devoirs » de longueur variable ; ils sont néanmoins de niveau plus élevé, disons troisième année post-baccalauréat.

Bibliographie

[ACHU] D. AZÉ, G. CONSTANS et J-B. HIRIART-URRUTY, *Calcul différentiel et équations différentielles : Exercices corrigés* (niveau L3). EDP Sciences (2010).

[C] S.D. CHATTERJI, *Cours d'Analyse, Tome 3 : Equations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles*. Presses polytechniques et universitaires romandes (1998).

[FFJ] G. FULFORD, P. FORRESTER and A. JONES, *Modelling with differential and difference equations*. Australian Mathematical Society Lecture Series 10. Cambridge University Press (1997).

[G] J. GRIFONE, *Algèbre linéaire* (4ème édition). Cépaduès Editions (2011).

[HW] J. HUBBARD and B. WEST, *Equations différentielles et systèmes dynamiques*. Editions Cassini (1999).

[L] J.D. LOGAN, *A first course in differential equations*. Undergraduate texts in mathematics. Springer (2006).

[R] C.E. ROBERTS, *Ordinary differential equations : Applications, Models and Computing*. CRC Press, Chapman and Hall (2010).

[S] D. SANCHEZ, *Ordinary differential equations : A brief electric tour*. The Mathematical Association of America (2002).

[S2] D. SANCHEZ, *Ordinary differential equations texts : A review*. American Math. Monthly (1998), pp. 377-383.